# Vážení zákazníci,

dovolujeme si Vás upozornit, že na tuto ukázku knihy se vztahují autorská práva, tzv. copyright.

To znamená, že ukázka má sloužit výhradně pro osobní potřebu potenciálního kupujícího (aby čtenář viděl, jakým způsobem je titul zpracován a mohl se také podle tohoto, jako jednoho z parametrů, rozhodnout, zda titul koupí či ne).

Z toho vyplývá, že není dovoleno tuto ukázku jakýmkoliv způsobem dále šířit, veřejně či neveřejně např. umisťováním na datová média, na jiné internetové stránky (ani prostřednictvím odkazů) apod.

*redakce nakladatelství BEN – technická literatura*
*redakce@ben.cz*

# 2 ELEKTROSTATICKÉ POLE

## 2.1 Siločáry, Coulombův zákon

Připomeňme známou skutečnost, že existují kladné a záporné elektrické náboje. Náboje stejného znaménka se odpuzují, nestejného znaménka se přitahují.

Začneme studiem elektrického pole nejjednoduššího útvaru: bodového kladného náboje o velikosti náboje $Q_1$. Do jeho blízkosti položme jiný kladný bodový náboj o velikosti $Q_2$ a nechme ho volně se pohybovat pod vlivem odpudivé síly **F** dvou nábojů. Když nakreslíme dráhu, po které se kladný náboj $Q_2$ pohybuje, tak to bude přímka. Když na ní šipkou vyznačíme směr, ve kterém se náboj pohybuje, tak to bude tzv. siločára elektrického pole. Siločára vyznačuje směr pohybu kladného náboje, ale nic nevypovídá o tom, jak velká síla působí na kladný náboj $Q_2$.

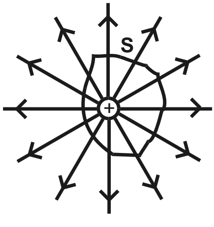
Siločára patří ke zdrojovému náboji elektrického pole $Q_1$ a chceme, aby byla nezávislá na velikosti náboje $Q_2$. Proto silové působení elektrického pole na libovolný náboj $Q_2$ vyjadřujeme pomocí intenzity **E** elektrického pole

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_2},$$

kde **F** je síla působící na náboj $Q_2$. Nezávislost **E** na náboji $Q_2$ je podmíněna lineárním prostředím (vakuem), kde platí *princip superpozice*.

Jedna siločára určuje jenom směr intenzity elektrického pole, ale nic nevypovídá o velikosti intenzity. Musíme zobrazit mnoho siločar, abychom mohli použít Faradayovu poučku: **intenzita elektrického pole je úměrná hustotě siločar**, přičemž pod hustotou siločar rozumíme počet siločar, které protínají plochu kolmou na siločáry, dělenou velkostí dané plochy. Je třeba přiznat, že je to jen velmi vágní definice hustoty siločar.

Aby Faradayova poučka měla smysl, při znázornění siločar musí být dodržena zásada, že pro bodový náboj (obecně kulový náboj) každý směr v jeho okolí je rovnocenný. Tudíž siločáry musí být rozloženy rovnoměrně ve všech směrech. Jinými slovy, musí být nakresleny v souladu s *principem prostorové symetrie* (*obr. 2.1*).




***Obr. 2.1*** *Siločáry bodového náboje (v rovině výkresu)*

Z důvodu prostorové symetrie je velikost intenzity E (ne její směr) ve všech místech shodně vzdálených od bodového náboje $Q_1$ stejná. Proto z Faradayovy poučky vyplývá, že velikost intenzity E na povrchu koule o poloměru R se středem v bodovém náboji $Q_1$ je:

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_1}{4\pi R^2}, \tag{2.1a}$$

kde ε je konstanta úměrnosti zvaná elektrická permitivita. Pro úplnost zdůrazněme, že když do elektrického pole náboje $Q_1$ vložíme náboj $Q_2$ s cílem měřit intenzitu elektrického pole náboje $Q_1$, výsledné elektrické pole se změní, ale na sílu působící na náboj $Q_2$ má vliv jen původní pole náboje $Q_1$ a výsledná síla na něho působící je:

$$\boxed{F = EQ_2 = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{4\pi R^2}} \tag{2.1b}$$

Rovnice (2.1b) je slavný Coulombův zákon. Odvodili jsme ho na základě pojmu siločára a Faradayovy poučky. Historicky to bylo asi opačně. Na základě Coulombových pokusů a jeho zákona navrhl Faraday grafický postup znázornění a „výpočtu“ intenzity elektrického pole. Síla F je vektor, a chceme-li v Coulombově zákonu vyjádřit i její směr, musíme psát:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{4\pi R^3}\mathbf{R}, \tag{2.1c}$$

kde **R** je vektor vzdálenosti se začátkem v místě náboje $Q_1$ a koncem v místě náboje $Q_2$, přičemž síla **F** je síla působící na náboj $Q_2$.

Elektrická permitivita vakua ε je jedna ze tří konstant přírody elektromagnetických jevů. Další dvě jsou magnetická permeabilita μ (seznámíme se s ní v příští kapitole) a rychlost světla c. Hodnota permitivity a permeability se v krátké historii (cca dvě stě let) měnila v závislosti na růstu poznání souvislostí elektromagetických jevů, jejich matematického popisu a měrné soustavy jednotek. Jejich fyzikální význam se však nezměnil. K pochopení souvislosti tří přírodních konstant elektromagnetických jevů a jejich hodnoty dospějeme až v dalších kapitolách. Zde jen připomeneme, že zákonem 35/62 Sbírky zákonů a nařízení z roku 1962 je stanoveno používání měrných jednotek SI (Système International d'Unités), kde základními jednotkami jsou metr, kilogram, sekunda a ampér. V této soustavě jednotek hodnota elektrické permitivity vakua je $\varepsilon_0 = 1/c_0^2\mu_0 \cong 8{,}854\ 10^{-12}\ [\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^{-3}\mathrm{s}^4\mathrm{A}^2]$, kde index 0 zdůrazňuje, že se jedná o hodnoty ve vakuu.

## 2.2 Výtok intenzity elektrického pole přes pomyslnou uzavřenou plochu

Kromě siločar elektrického pole náboje $Q_1$ je na *obr. 2.1* znázorněna pomyslná plocha S (řez plochy rovinou výkresu) uzavírající náboj $Q_1$. Je vidět, že počet siločar vystupujících (vytékajících) z prostoru uzavřeném pomyslnou plochou, nezávisí na tvaru plochy ani na její velikosti. Siločáry reprezentují intenzitu elektrického pole, a proto jsme oprávněni říct, že tok intenzity elektrického pole z uzavřené plochy obsahující náboj $Q_1$, nezávisí na velikosti a tvaru pomyslné plochy uzavírající náboj $Q_1$.

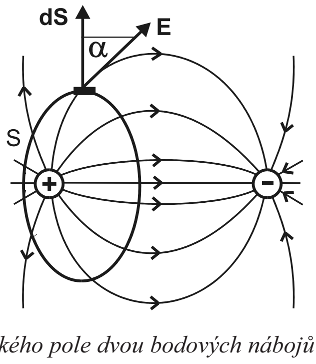
Elementární tok dΦ intenzity **E** přes elementární plošku dS kolmou na vektor intenzity **E** se rovná součinu plochy elementární plošky a hodnoty intenzity E. Snadno spočítáme výtok $\phi_i$ intenzity elektrického pole přes kulovitou plochu se středem v bodě náboje $Q_i$ a poloměru R. Intenzita pole v každém bodě plochy je kolmá na plochu a má hodnotu E, takže výtok $\phi_i$ s ohledem na rovnici (2.1a) je:

$$\phi_i = 4\pi R^2 E = \frac{1}{\varepsilon} Q_i \tag{2.2}$$

Zatím jsme mlčky předpokládali, že náboj $Q_i$ je kladný, intenzita elektrického pole směřuje ven z koule a $\phi_i$ má kladnou hodnotu. Je-li náboj $Q_i$ záporný, intenzita směřuje do koule a výtok intenzity elektrického pole má zápornou hodnotu.

To, co jsme dosud řekli o výtoku z koule, platí pro libovolnou pomyslnou plochu nezávisle na její velikosti a tvaru. Pro lineární prostředí platí princip superpozice elektrických polí, což umožňuje sčítat náboje $Q_i$ a jejich výtoky $\phi_i$. Proto platí věta: **Výtok intenzity elektrického pole přes pomyslnou uzavřenou plochu je úměrný součtu nábojů uvnitř plochy.** Matematické vyjádření této věty je:

$$\sum_i Q_i = \varepsilon \sum_i \phi_i \tag{2.3}$$




***Obr. 2.2*** *Siločáry elektrického pole dvou bodových nábojů*

Elektrické pole několika nábojů vzniká superpozicí elektrických polí jednotlivých nábojů. Intenzita elektrického pole v každém bodě prostoru je vektorovým součtem intenzit jednotlivých dílčích polí. Jako příklad na *obr 2.2* jsou v rovině výkresu znázorněny siločáry elektrického pole dvou bodových nábojů. Na *obr. 2.2* je taky znázorněna uzavřená plocha S.

Abychom vysvětlili pojem tok intenzity elektrického pole plochou S, zavedeme pojem vektor elementární plošky **dS.** Je to vektor, jehož velikost se rovná ploše elementární plošky, jeho směr je kolmý na plochu v daném místě a směřuje ven z uzavřené plochy. Přes elementární plošku „vyteče" složka intenzity elektrického pole, která je kolmá na elementární plošku, čili paralelní s vektorem **dS**. Přes elementární plošku tak „vyteče množství intenzity" **E** . **dS**, kde **E** . **dS** je skalární součin uvedených vektorů. Přes celou uzavřenou plochu S pak vyteče integrál elementárních výtoků a rovnice 2.3 nabude tvar:

$$\sum Q_i = \varepsilon \oint_S \mathbf{E}.\mathbf{dS} \tag{2.4}$$

Rovnice 2.4 je obdobou první Maxwellovy rovnice pro elektrické pole diskrétních nábojů. Maxwellova rovnice (1.1) platí pro spojité rozložení nábojů v prostoru.

## 2.3 Maxwellova rovnice pro spojité rozložení nábojů

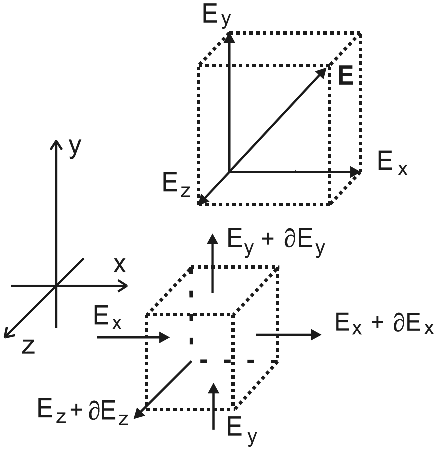
Z rovnice 2.4 lze snadno odvodit rovnici pro výtok elektrického pole pro případ, že rozložení nábojů je spojité. Hustotu náboje označme ρ. Přirozeně předpokládáme, že její hodnota není konstanta, ale závisí na místě v prostoru. Nicméně, pro malý objem dV, který je ohraničený uzavřenou plochou S limitující k nule, můžeme předpokládat, že hustota ρ je konstantní a celkový náboj v elementárním objemu je ρdV. Z rovnice 2.4 pak vyplývá:

$$\rho = \varepsilon \lim_{S \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{E}.\mathbf{dS}}{dV} \tag{2.5}$$

Obtížnou limitu v předešlém výrazu nahradíme operátorem *div* (od slova divergence – rozbíhavost), čímž se přiblížíme k první Maxwellové rovnici (1.1):

$$\rho = \varepsilon \, div\mathbf{E} \tag{2.6}$$

Připomeňme, že slovem operátor označujeme soubor operací nad argumentem operátoru, který vydá výslednou hodnotu těchto operací. Operace *div***E** (tj. posloupnost úkonů nad **E**) a tudíž operátor *div* je zatím definován limitou v rovnici 2.5. Je to nejobecnější definice divergence, která není vázána k popisu prostoru žádným souřadným systémem. V praktickém životě prostor se často popisuje kartézskými souřadnicemi, a proto formu operátora *div* odvodíme ještě i pro tento souřadnicový systém.




***Obr. 2.3*** *K objasnění operátoru div v kartézských souřadnicích*

Na *obr. 2.3* je v kartézském souřadnicovém systému znázorněna elementární krychle o stranách $\partial x$, $\partial y$, $\partial z$. Vektor intenzity elektrického pole **E** rozložíme na složky paralelní s osami souřadnicového systému: $\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z$, kde **i**, **j**, **k** jsou jednotkové vektory ve směru os x, y, z. Přes obě plochy $\partial y\partial z$ hranolu protéká složka intenzity $E_x$, ale obecně různé velikosti. Označme jejich rozdíl $\partial E_x$. Jen tento rozdíl přispívá k výtoku intenzity elektrického pole z krychle, a proto výtok z krychle ve směru x je roven $\partial E_x\partial y\partial z$. Analogicky, ve směru osy y je výtok $\partial E_y\partial x\partial z$ a ve směru osy z je výtok $\partial E_z\partial x\partial y$. Celkový výtok intenzity je součet uvedených dílčích výtoků. Dosadíme-li tyto výsledky do rovnice (2.5), dostaneme:

$$\rho = \varepsilon \frac{\partial E_x\partial y\partial z + \partial E_y\partial x\partial z + \partial E_z\partial x\partial z}{\partial x\partial y\partial z}$$

Porovnáním této rovnice s Maxwellovou rovnicí (2.6) dostaneme, že *div***E** pro kartézský systém souřadnic představuje součet parciálních derivací složek vektoru **E.**

$$div\,\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Přechodem k popisu prostoru kartézskými souřadnicemi zavádíme namísto jednoho vektoru tři jeho složky ve směrech os souřadnicového systému. Tím výrazy ztrácejí na své stručnosti. Přitom ukazatelem matematické krásy je právě kompaktnost popisu, což navíc usnadňuje práci s výrazy. To je důvod, proč se zavádí pojem Hamiltonův operátor zvaný nabla operátor:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Pojmenování nabla je asyrského původu označující harfu, kterou symbol $\nabla$ připomíná. Formálně je to vektor, protože v něm vystupují jednotkové vektory **i**, **j**, **k**, ale jinak obsahuje jen symboly parciálních derivací. Nicméně, pracuje se s nim jako s reálným vektorem. S jeho pomocí lze *div***E** psát jako skalární součin nabla operátoru a intenzity elektrického pole **E**. První Maxwellova rovnice tak může mít i následující zápis:

$$\rho = \varepsilon\nabla \cdot \mathbf{E} \tag{2.7}$$

Zdůrazňujeme, že tato forma zápisu je vázaná k popisu prostoru kartézskými souřadnicemi. Pro další teoretické práce má výhodu v tom, že v ní vystupují vektory namísto derivací.

Shrneme předpoklady, za kterých jsme odvodili formy první Maxwellovy rovnice (2.4), (2.5), (2.6), (2.7).

a) Elektrický náboj svým elektrickým polem působí silou na jiný náboj.
b) Rozložení nábojů může být diskrétní [rovnice (2.4)], nebo spojité [rovnice (2.5) až (2.7)].
c) Platí princip superpozice.
d) Platí princip prostorové symetrie.
e) Platí Faradayova poučka o hustotě siločar a intenzitě pole.

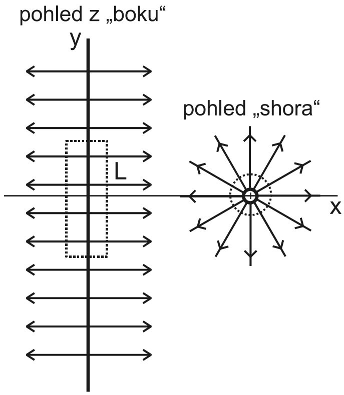
## 2.4 Elektrické pole liniového náboje

V předešlých statích jsme vycházeli z pojmu bodový náboj. Bod je nejjednodušší geometrický útvar. Nyní budeme uvažovat o druhém nejjednodušším útvaru a sice o nekonečně dlouhé linii náboje (liniový náboj), kde na jednotku délky linie připadá náboj $\tau$. Na *obr. 2.4* jsou v souladu s principem prostorové symetrie znázorněny siločáry intenzity elektrického pole **E** liniového náboje ve dvou pohledech, „z boku“ a „shora“.

Představme si povrch válce výšky L a poloměru R, jehož osa je ztotožněná s linií náboje. Ve válci se nachází náboj $\tau$L. Z důvodu symetrie intenzita elektrického pole je kolmá na povrch válce a co do velikosti (ne směru) je konstantní E.

Výtok intenzity elektrického pole **E** z válce je tak 2πRLE. Podle rovnice (2.3) výtok **E** z uzavřené plochy vynásobený dielektrickou konstantou ε se rovná celkovému náboji τL v objemu uzavřeném touto plochou: εϕ = ε2πRLE = τL. Pro intenzitu elektrického pole E tak dostaneme:

$$E = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\tau}{2\pi R} \tag{2.8}$$



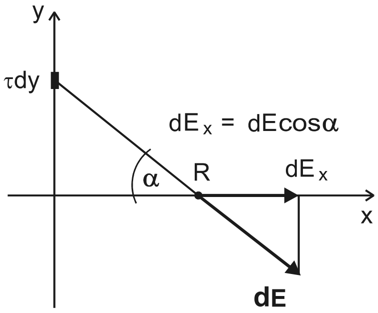

*__Obr. 2.4__ Siločáry liniového náboje*

Na základě Faradayovy poučky o siločárách bezprostředně (a elegantně) jsme dospěli k zjištění, že intenzita elektrického pole klesá úměrně se vzdálenosti R od linie. Přínos Faradayovy poučky oceníme více, když pro ilustraci uvedeme ještě postup výpočtu elektrického pole liniového náboje, vycházeje z Coulombova zákona.

Na *obr. 2.5* je osa souřadnic y ztotožněna s linií náboje a osa souřadnic x se siločárou. Každý náboj τdy elementární délky linie přispívá k intenzitě elektrického pole v bodě x = R jen svou složkou ve směru x. Jeho složka ve směru y je vykompenzována působením náboje symetricky položeným k ose x. Náboj τdy lze pokládat za bodový a s ohledem na Coulombův zákon, v místě x = R lze intenzitu E vyjádřit integrálem:

$$E = \frac{\tau}{\varepsilon 4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R}{\left(R^2 + y^2\right)\sqrt{\left(R^2 + y^2\right)}}dy \tag{2.9}$$

Po integrovaní a dosazení horní a dolní meze, pro intenzitu E dostaneme již známý výraz (2.8).

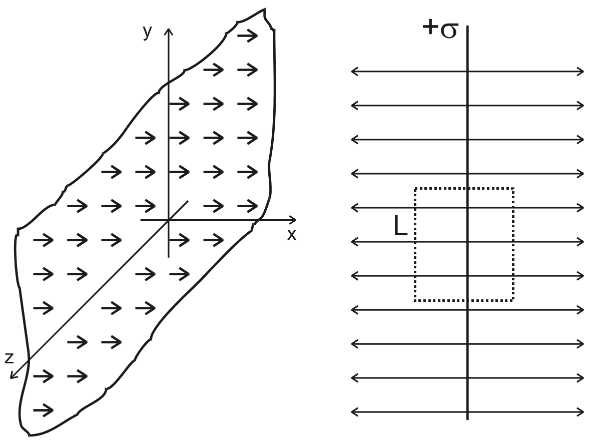



*Obr. 2.5* *K výpočtu intenzity elektrického pole liniového náboje pomocí Coulombova zákona*

Pojem liniový náboj se v praxi často nepoužívá. Uvedli jsme ho proto, abychom připravili půdu pro zkoumání magnetického pole v okolí vodiče elektrického proudu, kde pojem nekonečně dlouhého vodiče hraje základní úlohu.

## 2.5 Elektrické pole plošného náboje

Po bodu a linii je dalším nejjednodušším geometrickým útvarem rovinná plocha od nekonečna do nekonečna. Představme si, že na této ploše je náboj s plošnou hustotou σ. Takto nabité rovině říkáme plošný náboj. Na *obr. 2.6* je znázorněn plošný náboj a siločáry intenzity jeho elektrického pole.




*Obr. 2.6* *Siločáry elektrického pole plošného náboje*

Ztotožníme-li plochu yz kartézské soustavy s rovinou náboje, pak siločáry intenzity elektrického pole budou paralelní s osou x a jejich hustota bude konstantní ve všech místech prostoru z důvodu principu prostorové symetrie. Proto podle Faradayovy poučky bude intenzita elektrického pole v celém prostoru konstantní co do velikosti, ale opačného směru z jedné a druhé strany plošného náboje.

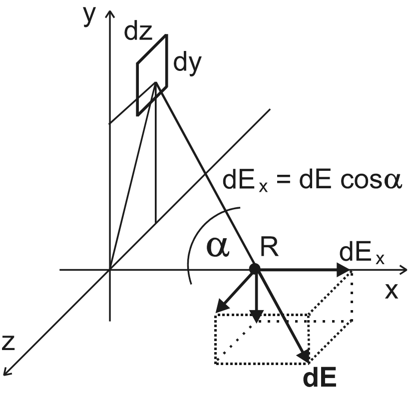
V pravé části *obr. 2.6* je znázorněn průmět siločar do roviny xy. Tam je taky znázorněný pomyslný průmět krychle o výšce L a hloubce H, která poslouží k výpočtu intenzity elektrického pole E. Výtok intenzity E z krychle je 2ELH a náboj v krychli je σLH. Podle rovnice (2.3) pro intenzitu elektrického pole tak dostaneme:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \tag{2.10}$$

Vidíme, že intenzita elektrického pole je pro plošný náboj nezávislá na vzdálenosti R od roviny náboje, jak jsme již mohli konstatovat na základě hustoty siločar. Pro ilustraci uvedeme ještě postup odvození rovnice (2.10) pomocí Coulombova zákona. Na *obr. 2.7* je plocha náboje ztotožněna s rovinou yz kartézských os. Intenzitu elektrického pole E lze vypočítat jako součet (plošný integrál) příspěvků od jednotlivých elementárních plošných nábojů σdydz (*obr. 2.7*). Uplatňuje se jen složka intenzity ve směru osy x, protože složky v směrech y a z se ruší působením nábojů symetricky položených plošek. Intenzita elektrického pole v bodě x = R pak bude:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon 4\pi} \int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(R^2 + y^2 + z^2\right)} \frac{R}{\sqrt{\left(R^2 + y^2 + z^2\right)}} \, dydz \tag{2.11}$$

Vyčíslením uvedených integrálů dostaneme opět rovnici (2.10).




***Obr. 2.7*** *K objasnění rovnice 2.10*