Vážení zákazníci,

dovolujeme si Vás upozornit, že na tuto ukázku knihy se vztahují autorská práva, tzv. copyright.

To znamená, že ukázka má sloužit výhradně pro osobní potřebu potenciálního kupujícího (aby čtenář viděl, jakým způsobem je titul zpracován a mohl se také podle tohoto, jako jednoho z parametrů, rozhodnout, zda titul koupí či ne).

Z toho vyplývá, že není dovoleno tuto ukázku jakýmkoliv způsobem dále šířit, veřejně či neveřejně např. umisťováním na datová média, na jiné internetové stránky (ani prostřednictvím odkazů) apod.

redakce nakladatelství BEN – technická literatura
redakce@ben.cz

Kapitola 3.

Mnohočleny

Příklad 3.1. Vypočtěme

a) $5a^3 - \left[2a^2 - (2a+1)\right] - \left[a + \left(3a^3 - a^2\right)\right] = 5a^3 - \left[2a^2 - 2a - 1\right] - \left[a + 3a^3 - a^2\right] =$

$= 5a^3 - 2a^2 + 2a + 1 - a - 3a^3 + a^2 = 2a^3 - a^2 + a + 1,$

b) $15a^3 - \left[-4a^2 - \left(5a - 8a^2 + 2a^3\right) - a\right] + 3a + 1 =$

$= 15a^3 - \left[-4a^2 - 5a + 8a^2 - 2a^3 - a\right] + 3a + 1 =$

$= 15a^3 + 4a^2 + 5a - 8a^2 + 2a^3 + a + 3a + 1 =$

$= 17a^3 - 4a^2 + 9a + 1,$

c) $(2a+1)(2a+3) + (3a-2)(5a-3) = 4a^2 + 6a + 2a + 3 + 15a^2 -$

$-9a - 10a + 6 = 19a^2 - 11a + 9,$

d) $(x+2y)(2x-y) - (x-2y)(2x+y) =$

$= 2x^2 - xy + 4xy - 2y^2 - \left(2x^2 + xy - 4xy - 2y^2\right) =$

$= 2x^2 - xy + 4xy - 2y^2 - 2x^2 - xy + 4xy + 2y^2 = 6xy,$

e) $\left(x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x\right) : x = x^3 - 6x^2 + 2x - 1, \qquad x \neq 0,$

f) $\left(8x^3y^2 - 6x^2y^3 + 4x^2y^2\right) : 2x^2y = 4xy - 3y^2 + 2y, \quad xy \neq 0.$

Příklad 3.2. Mnohočleny je možné někdy vyjádřit jako součin jiných mnohočlenů. Provádíme to vytýkáním společného činitele před závorku nebo pomocí vzorců, např.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
Ukážeme si to na několika příkladech:

a) $4a^2 - 2ab = 2a(2a - b)$,

b) $a^2b - ab^2 = ab(a - b)$,

c) $x^3y^2 - x^2y^3 + x^2y^2 = x^2y^2(x - y + 1)$,

d) $9a^2 - 4b^2 = (3a)^2 - (2b)^2 = (3a - 2b)(3a + 2b)$,

e) $32a^2 - 2 = 2(16a^2 - 1) = 2(4a - 1)(4a + 1)$,

f) $2a^5 - 2a = 2a(a^4 - 1) = 2a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = 2a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$,

g) $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc = (a + b)^2 - c(a + b) = (a + b)(a + b - c)$,

h) $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2 = z(x - y) - (x^2 - 2xy + y^2) = z(x - y) - (x - y)^2 =$
$= (x - y)[z - (x - y)] = (x - y)(z - x + y)$,

i) $ac - bc - ad + bd = c(a - b) - d(a - b) = (a - b)(c - d)$,

j) $a^6 + a^4 - a^2 - 1 = a^4(a^2 + 1) - (a^2 + 1) = (a^2 + 1)(a^4 - 1) =$
$= (a^2 + 1)(a^2 + 1)(a^2 - 1) = (a^2 + 1)^2(a + 1)(a - 1)$.

<u>Příklad 3.3</u>. Poznatků z předchozího příkladu se využívá např. při krácení zlomků. Uvedeme opět několik příkladů.

a) $\dfrac{ab + a^2}{b^2 + ab} = \dfrac{a(b + a)}{b(b + a)} = \dfrac{a}{b}, \quad b \neq 0,\ a \neq -b,$

b) $\dfrac{u^2 - v^2}{u^2 - uv} = \dfrac{(u - v)(u + v)}{u(u - v)} = \dfrac{u + v}{u}, \quad u \neq 0,\ u \neq v,$

c) $\dfrac{ax + x - a - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x(a + 1) - (a + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{(a + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{a + 1}{x + 1}, \quad x \neq \pm 1,$

d) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{x^2 + 2xz + z^2 - y^2} = \dfrac{(x + y)^2 - z^2}{(x + z)^2 - y^2} =$

$= \dfrac{(x + y + z)(x + y - z)}{(x + z + y)(x + z - y)} = \dfrac{x + y - z}{x - y + z}, \qquad y \neq \pm (x + z),$

e) $\dfrac{3xy+9y-2x-6}{3xy-2x-9y+6}=\dfrac{3y(x+3)-2(x+3)}{3y(x-3)-2(x-3)}=$

$=\dfrac{(x+3)(3y-2)}{(x-3)(3y-2)}=\dfrac{x+3}{x-3},\quad x\neq 3, y\neq \dfrac{2}{3},$

f) $\dfrac{a^2-4}{ab+2b-a-2}=\dfrac{(a-2)(a+2)}{b(a+2)-(a+2)}=\dfrac{(a-2)(a+2)}{(a+2)(b-1)}=\dfrac{a-2}{b-1},$

$a\neq -2,\ b\neq 1.$

<u>Příklad 3.4.</u> Slučme zlomky:

a) $\dfrac{3x-1}{x+y}-\dfrac{4-2x}{x+y}=\dfrac{3x-1-4+2x}{x+y}=\dfrac{5x-5}{x+y},\ x\neq -y,$

b) $\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{1}{2-a}=\dfrac{a}{a-2}+\dfrac{1}{(-2+a)}=\dfrac{a}{a-2}+\dfrac{1}{a-2}=\dfrac{a+1}{a-2},\ a\neq 2,$

c) $\dfrac{3}{a+b}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{2a-b}{a^2+ab}=\dfrac{3a+a+b-2a+b}{a(a+b)}=$

$\dfrac{2a+2b}{a(a+b)}=\dfrac{2(a+b)}{a(a+b)}=\dfrac{2}{a},\qquad a\neq 0,\ a\neq -b,$

d) $\dfrac{x-2y}{x+y}-\dfrac{2x-y}{y-x}-\dfrac{2x^2}{x^2-y^2}=\dfrac{x-2y}{x+y}+\dfrac{2x-y}{x-y}-$

$-\dfrac{2x^2}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{(x-2y)(x-y)+(2x-y)(x+y)-2x^2}{(x-y)(x+y)}=$

$=\dfrac{x^2-2xy-xy+2y^2+2x^2-xy+2xy-y^2-2x^2}{(x+y)(x-y)}=$

$=\dfrac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{x-y}{x+y},\ x\neq \pm y.$

Příklad 3.5. Násobení a dělení zlomků. Vypočtěme:

a) $$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{x-1-2x}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{1-x}{x}=$$

$$=\frac{-1-x}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{1-x}{x}=\frac{-(1+x)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{-(x-1)}{x}=$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x},\qquad x\neq 0, x\neq \pm 1,$$

b) $$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{b}{a-b}\right)=\frac{b-a}{ab}\cdot\frac{a-b+b}{a-b}=$$

$$=\frac{-(a-b)}{ab}\cdot\frac{a}{a-b}=-\frac{1}{b},\quad ab\neq 0, a\neq b,$$

c) $$\left(\frac{3}{x+1}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{2-x}-1\right)=\frac{3-x-1}{x+1}\cdot\frac{3-2+x}{2-x}=$$

$$=\frac{2-x}{x+1}\cdot\frac{1+x}{2-x}=1,\qquad x\neq -1, x\neq 2,$$

d) $$\left(1+\frac{a}{1-a}\right):\left(1+\frac{2a}{1-a}\right)=\frac{1-a+a}{1-a}:\frac{1-a+2a}{1-a}=$$

$$=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1-a}{1+a}=\frac{1}{1+a},\qquad a\neq \pm 1,$$

e) $$\left(\frac{a^2}{4}-b^2\right):\left(1+\frac{a+2b-12}{12}\right)=\frac{a^2-4b^2}{4}:\frac{12+a+2b-12}{12}=$$

$$=\frac{a^2-4b^2}{4}\cdot\frac{12}{a+2b}=\frac{(a-2b)(a+2b)}{4}\cdot\frac{12}{a+2b}=$$

$$=3(a-2b),\qquad a\neq -2b.$$

Zkušenější čtenář může počítat takto:

f) $$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x}{a}+1\right):\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{x^2+2ax+a^2}{a^2}\cdot\frac{a}{a+x}=$$

$$=\frac{(x+a)^2}{a^2}\cdot\frac{a}{x+a}=\frac{x+a}{a},\qquad a\neq 0, x\neq -a.$$

Příklad 3.6. Zjednodušme složený zlomek $\dfrac{1+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$.

Řešení: Složený zlomek můžeme zjednodušit dvěma způsoby:

a) Složený zlomek vyjádříme jako dělení čitatele jmenovatelem, tj.

$$\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}=\left(1+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{a+b}{a}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{a+b}{a}\cdot\frac{ab}{(a+b)(a-b)}=\frac{b}{a-b},\quad ab\neq 0, a\neq \pm b,$$

b) Složený zlomek rozšíříme výrazem ab (nejmenší společný násobek jmenovatelů a, b) a dostaneme

$$\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\cdot\frac{ab}{ab}=\frac{ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{b}{a-b},\quad a\neq \pm b, ab\neq 0.$$

Cvičení

3.1. Slučte a výsledek uspořádejte sestupně

a) $5c^2 + 3c - c^2$,

b) $5h - 3h^2 + h$,

c) $x^3 - 3x - x^2 + 4x^3 + x$,

d) $10 - 2b^2 + b^2 - 5 + 5b^2 + 3b$.

3.2. Odstraňte závorky a slučte:

a) $4x - (5x + 3y) - 2y$,

b) $(7x - 3x^2) - (3x - 7x^2)$,

c) $(4x^2 - 5x^3 + x) - (x^2 + 3x^4 - x^4)$,

d) $(3u + 5v - 7) - (2 - 3v) - (4 - 5u)$.

3.3. Slučte:

a) $1 + 3t - \{1 + t - [1 + 2t - (t - 3) - (1 + 4t)] - 1\}$,

b) $1 - \left[5x^3 - \left(2x^2 + 1\right)\right] - \left[2x^3 - 3x^2 + \left(3x - 2\right)\right]$,

c) $1 - [x^2 - (3x + 2) + x] - \{x^2 - 3x - [1 - x^2 - (1 - 2x)] + 1\}$,

d) $\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y - \left[\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - \left(\frac{1}{9}x + \frac{3}{8}y\right)\right]$.

3.4. Odstraňte závorku:

a) $4(x - 5)$,

b) $a(x - 5)$,

c) $x(x - y)$,

d) $12(4x + 6y + 9z)$.

3.5. Zjednodušte:

a) $2(c + 1) + 3(c + 2)$,

b) $3(u - 2) - (5 - u)$,

c) $2p(p^2 - 1) + p^2(1 - 2p)$,

d) $1 + 3(1 - y) + 2(4y + 7)$.

3.6. Zjednodušte:

a) $3x\,(2x - 3y) + 2y(2x - 3y) - 3(x^2 + y^2)$,

b) $3x^3\,(1 - 2x + 3x^2) - 3x^2(1 - 2x + 3x^2) + 2x(1 - 2x + 3x^2)$,

c) $6a - [5b - 3(a - 2) - 8]$,

d) $12(a + b) - 4[4a + 2b - 2(a + b)]$.

3.7. K danému mnohočlenu napište mnohočlen opačný:

a) $3a + 2b - c$, b) $x^2 + y^2 - 8xy$,

c) $4 - x^2 - y^2$, d) $7xy - x + y$.

3.8. Zapište pomocí závorek:

a) K číslu x přičtěte $2y$ a potom odečtěte rozdíl čísel x, y.
b) K součtu čísel u, $2v$ přičtěte rozdíl čísel u, v.
c) Od rozdílu čísel a, $2b$ odečtěte součet čísel a, b.
d) Od čísla u odečtěte součet čísel $2v, x$, pak odečtěte rozdíl čísel x, y.
e) Rozdíl s menšencem $2x - y$ a menšitelem $3u + 2v$ znásobte součtem čísel $2a$, $3b$.
f) Od čísla u odečtěte číslo d a rozdíl násobte 10.
g) Udejte oč je větší $3x + 2y$ než $2x - 5y$.
h) K polovině součtu čísel $2u$, $3v$ přičtěte trojnásobek rozdílu čísel $4x$, $3y$.

3.9. Zapište pomocí závorek:

a) K součtu čísel $3a$, $2b$ přičtěte dvojnásobek rozdílu čísel $3x$, $4y$.
b) Od součtu čísel $2a$, b odečtěte rozdíl čísel x, y zmenšený o 7.
c) K rozdílu čísel $3a$, $4b$ přičtěte dvojnásobek čísla x zmenšený o 2.
d) Od rozdílu čísel $2a$, b odečtěte dvojnásobek rozdílu čísel $3x$, $2y$ zvětšený o 4.
e) Od čísla $7a$ odečtěte číslo $2b$ a pak odečtěte součet čísel x, y.
f) K rozdílu čísel $2a$, $3b$ zmenšenému o 4 přičtěte dvojnásobek rozdílu čísel x, y zmenšený o 3.
g) K čtyřnásobnému součtu čísel $4a$, $2b$ zmenšeného o 14, přičtěte dvojnásobek rozdílu čísel x, y zvětšený o 6.
h) Rozdíl s menšencem $2a - 4b$ a menšitelem $4u - 3v$ znásobte rozdílem čísel x, y.
i) Rozdíl s menšencem $3a + 4b$ a menšitelem $2u + 3v$ zvětšete o číslo x zmenšené o 9.
j) O kolik je $3a + 4b$ větší než rozdíl čísel x, y zmenšený o 4.
k) O kolik je dvojnásobek součtu čísel $3x$, $8a - 2b$ zmenšený o 3 větší než trojnásobek rozdílu čísel x, y zvětšený o 9.
l) Kolikrát je poloviční součet čísel $3x - y$, $2u + 3v$ větší než třetina rozdílu čísel $3x + y$, $2u + v$ zvětšená o 12.