

Vážení zákazníci,

dovolujeme si Vás upozornit, že na tuto ukázkou knihy se vztahují autorská práva, tzv. copyright.

To znamená, že ukáзка má sloužit výhradně pro osobní potřebu potenciálního kupujícího (aby čtenář viděl, jakým způsobem je titul zpracován a mohl se také podle tohoto, jako jednoho z parametrů, rozhodnout, zda titul koupí či ne).

Z toho vyplývá, že není dovoleno tuto ukázkou jakýmkoliv způsobem dále šířit, veřejně či neveřejně např. umístováním na datová média, na jiné internetové stránky (ani prostřednictvím odkazů) apod.

redakce nakladatelství BEN – technická literatura
redakce@ben.cz



Kapitola 3

Popis časově proměnných veličin.

Obvodové veličiny tj. elektrický proud a elektrické napětí se nazývají časově proměnné, jestliže jejich hodnoty závisí na čase. V teorii obvodů se z důvodů přehlednosti, usnadnění výpočtů a jednotného popisu pro výpočty s časově proměnnými veličinami neuzívají přímo funkce s časovou proměnnou (tj. siny, kosiny, exponenciály, různé posloupnosti impulzů) ale užívá se vyjádření pomocí Laplaceovy transformace nebo symbolické metody. Laplaceova transformace je slouží k obecnému popisu dějů v elektrických obvodech. Užívá se pro řešení jak přechodných dějů tak ustáleného stavu. Nevýhodou použití je určitá matematická náročnost. Symbolická metoda se užívá pro řešení elektrických obvodů v harmonickém ustáleném stavu. Výhodou je matematická jednoduchost a tedy vhodnost pro praktické výpočty. Nevýhodou je že metoda je omezena jen na harmonický ustálený stav obvodu.

3.1 Základní pojmy a číselné charakteristiky.

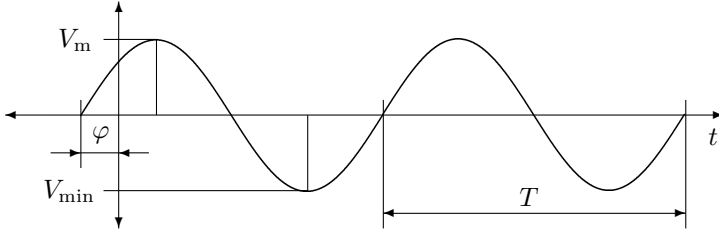
Časově proměnná veličina je veličina jejíž hodnota je závislá na čase.

Konstantní veličina je veličina jejíž hodnota je stálá a nezávislá na čase.

Stejnoseměrná veličina je veličina jejíž hodnota v závislosti na čase nemění znaménko. Veličina má jen buď kladné nebo jen záporné hodnoty. Příkladem může být například časová závislost napětí akumulátoru.

Polarita je synonymum pro znaménko hodnoty časově proměnné veličiny.

Perioda (řecky opakování) je nejmenší možná část, která plně charakterizuje časový průběh veličiny. Doba trvání periody se označuje T . Perioda se dříve nazývala cykl.



Obrázek 3.1: Časový průběh harmonické veličiny.

Kmitočet (nebo-li frekvence) je počet period připadajících na jednotku času tj. na 1 s. Kmitočet se označuje f . Základní jednotkou kmitočtu je jeden hertz značka 1 Hz.

Kmitavá veličina je veličina jejíž polarita se mění během periody.

Střídavá veličina je speciální případ kmitavé veličiny. Během periody se sobě rovnají plocha pod křivkou v kladných hodnotách a plocha nad křivkou v záporných hodnotách.

Harmonická veličina je speciální případ střídavé veličiny. Časový průběh harmonické veličiny lze popsat jedinou funkcí sinus, nebo kosinus dle vztahu:

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{nebo} \quad v = V_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.1)$$

kde V_m je amplituda, ω je úhlový kmitočet, t je čas, φ je fázový úhel. Na obrázku 3.1 je příklad časového průběhu harmonické veličiny popsané funkcí sinus. Harmonická funkce je definována podle [25] jako funkce n proměnných x_i v oboru reálných čísel, která má spojité všechny parciální derivace $\partial f / \partial x_i$ do druhého řádu včetně a vyhovuje Laplaceově rovnici

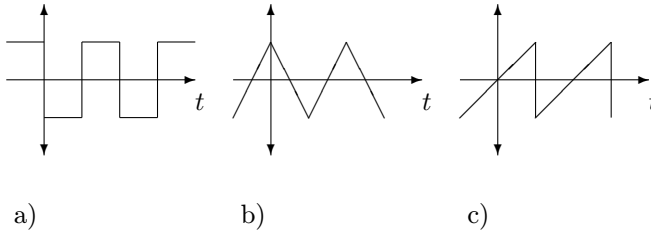
$$\frac{\partial^2 f}{x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{x_n^2} = 0 \quad (3.2)$$

V případě funkce pro popis veličin v elektrických obvodech $v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ se lze přesvědčit, že tato funkce splňuje tyto podmínky. Lze psát, že

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi) = e^y \sin(x)$$

Amplituda V_m je funkcí obvodových parametrů tj. R , L , C a lze ji určitě vyjádřit jako $\exp(y)$, kde y je reálná proměnná, x je funkcí času t . Tedy máme funkci $v = (y, x)$ jako funkci dvou reálných proměnných x a y . Pak lze psát, že

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^y \sin(x) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -e^y \sin(x) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$



Obrázek 3.2: Příklady časových průběhů neharmonických veličin a) obdélník, b) trojúhelník, c) pila.

a tedy Laplaceova rovnice je splněna.

Úhlový kmitočet¹ je úhel ω , který opíše poloměr jednotkové kružnice během doby rovné jedné periodě. V případě sinu nebo kosinu je to úhel rovný 2π radiánům za dobu jedné periody T . Úhlový kmitočet se udává v radiánech za sekundu (rad/s). V případě sinu či kosinu platí vztah:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.3)$$

Neharmonická veličina je časově proměnná veličina, jejíž časový průběh je periodický a nejedná se o časový průběh harmonické veličiny. Jsou to například časové průběhy popsané funkcemi označované v technické praxi jako obdélník, trojúhelník, pila, jednocestně a dvoucestně usměrněný sinus. Příklady časových průběhů neharmonických veličin jsou na obrázku 3.2.

Pulsující veličina zvaná taky „tepavá“ je ta během jejíž periody se nemění polarita. Například je to časový průběh jednocestně usměrněné veličiny popsané sinem.

Amplituda je maximální hodnota harmonické veličiny (jde tedy o kladnou hodnotu). Označuje se indexem m .

Rozkmit je rozdíl mezi maximální V_m (kladná hodnota) a minimální V_{\min} (záporná hodnota) hodnotou časově proměnné veličiny. Rozkmit se označuje indexem e . Platí tedy $V_e = V_m - V_{\min}$.

Číselné charakteristiky časově proměnných veličin. Z praktických důvodů potřeby porovnávat fyzikální účinky časově proměnných veličin jsou zavedeny jejich číselné charakteristiky. Jde zejména o porovnání tepelných, elektrochemických a silových účinků. Jako referenční (srovnávací) veličina těchto

¹Nezaměňovat s pojmem úhlová rychlost. Úhlová rychlost se týká mechanického otáčivého pohybu a je to vektor. Úhlový kmitočet je skalár.

účinků se volí konstantní veličina v praxi odpovídající stejnosměrnému proudu či napětí. Z praktického hlediska je vždy omezena doba trvání (nemůže být nekonečně dlouhá, jak vyžaduje teorie) či pozorování časově proměnné veličiny. Proto má smysl definovat číselné charakteristiky vzhledem k této konečné době jako vztažné době. V elektrotechnice mají velký význam periodické veličiny. Za vztažnou dobu se volí jejich perioda.

Střední hodnota. Označuje se indexem nula. Časově proměnný elektrický proud o střední hodnotě I_0 má stejné elektrochemické účinky jako stálý stejnosměrný proud o hodnotě I_0 . Elektrický proud musí během doby pozorování T dodat do spotřebiče stejný elektrický náboj Q jako stálý elektrický proud za tutéž dobu.

$$Q = I_0 T = \int_0^T i(t) \cdot dt \quad \rightarrow \quad I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cdot dt \quad (3.4)$$

Z této rovnice plyne obecný vzorec pro výpočet střední hodnoty V_0 periodické veličiny $f(t)$:

$$V_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt \quad (3.5)$$

Efektivní hodnota. Označuje se indexem eff, případně rms, pokud nehrozí nedorozumění tak se index vynechává. Časově proměnný elektrický proud o efektivní hodnotě I_{eff} vyvine na odporu R stejné množství tepla Q za dobu pozorování T jako stálý stejnosměrný proud o hodnotě I_{eff} za tutéž dobu.

$$Q = RI_{\text{eff}}^2 T = \int_0^T Ri^2(t) \cdot dt \quad \rightarrow \quad I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt} \quad (3.6)$$

Z této rovnice plyne obecný vztah pro výpočet efektivní hodnoty V_{eff} periodické veličiny $f(t)$:

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \cdot dt} \quad (3.7)$$

Efektivní hodnota veličin zvláště střídavého průběhu má velký význam. Hodnoty střídavých napětí a proudů měřené voltmetry a ampérmetry jsou těmito přístroji udávány v efektivních hodnotách. U veličin střídavého průběhu se definují činitel tvaru, činitel výkyvu a činitel plnění. Činitelé se používají v silnoproudé technice.

$$\text{činitel tvaru} \quad \beta = \frac{V_{\text{eff}}}{V_0} \quad (3.8)$$

$$\text{činitel výkyvu} \quad \gamma = \frac{V_{\text{m}}}{V_{\text{eff}}} \quad (3.9)$$

$$\text{činitel plnění} \quad \alpha = \frac{V_0}{V_m} \quad (3.10)$$

Pro střídavou veličinu platí:

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1 \quad (3.11)$$

Následuje výpočet číselných charakteristik technicky nejvýznamnějších časových průběhů. Při výpočtech není nutno uvažovat fázi φ protože výpočty se vztahují k periodě T .

Časový průběh sinus. Je popsán rovnicí $v = V_m \sin \omega t$, kde $\omega = 2\pi/T$.
Střední hodnota je

$$V_0 = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \sin \omega t \cdot dt = \frac{V_m}{T\omega} [-\cos \omega t]_0^T = 0 \quad (3.12)$$

Protože střední hodnota veličiny sinusového průběhu je nulová, nelze takovým proudem nabíjet akumulátory, nebo ho užívat ke galvanickému pokovení, v jedné půlperiodě proběhne jeden elektrolytický děj a v následující půlperiodě proběhne opačný elektrolytický děj, to platí při nízkém kmitočtu (například 50 Hz). Elektrolyza nenastává při dostatečně velkém kmitočtu (toho jevu se užívá třeba při měření vodivosti roztoků).

Efektivní hodnota je

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{V_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \cdot dt} = \quad (3.13)$$

$$V_m \sqrt{\frac{1}{2T} [t]_0^T - \frac{1}{4\omega T} [\sin 2\omega t]_0^T} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 V_m$$

Jednocestně usměrněný sinus. Časový průběh je na obrázku 3.3a). Je popsán na jedné periodě T rovnicí

$$f(t) = \begin{cases} V_m \sin \omega t, & \text{pro } 0 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{pro } T/2 < t < T \end{cases} \quad (3.14)$$

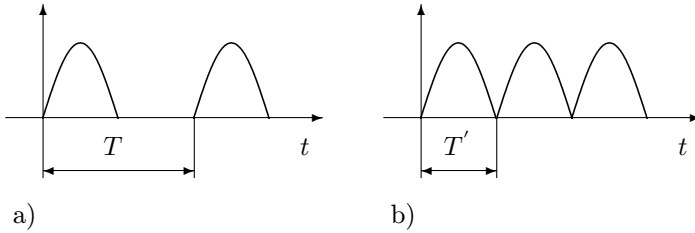
Střední hodnota je

$$V_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m \sin \omega t \cdot dt = \frac{V_m}{\omega T} [-\cos \omega t]_0^{T/2} = \frac{V_m}{\pi} \doteq 0,318 V_m \quad (3.15)$$

Efektivní hodnota je

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{V_m^2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \cdot dt} = \frac{V_m}{2} \quad (3.16)$$

Pro tento průběh vycházejí činitelé $\alpha = 1/\pi \doteq 0,318$, $\beta = \pi/2 \doteq 1,57$, $\gamma = 2$.



Obrázek 3.3: Časové průběhy a) jednocestně usměrněný sinus, b) dvoucestně usměrněný sinus.

Dvoucestně usměrněný sinus. Časový průběh je na obrázku 3.3b). Je popsán rovnicí $f(t) = |V_m \sin \omega t|$. Tento průběh má periodu $T' = T/2$, tedy poloviční než je perioda původního sinu. Střední hodnota je

$$V_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V_m \sin \omega t \cdot dt = \frac{2V_m}{\omega T} [-\cos \omega t]_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} V_m \doteq 0,636 V_m \quad (3.17)$$

Efektivní hodnota je

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} V_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (3.18)$$

Pro tento průběh vycházejí činitele $\alpha = 2/\pi \doteq 0,636$, $\beta = \pi/(2\sqrt{2}) \doteq 1,111$, $\gamma = \sqrt{2} \doteq 1,414$.

Příklad na střední hodnotu. Střídavý proud sinusového časového průběhu má efektivní hodnotu $I_{\text{eff}} = 5$ A. Jak dlouho bude potřeba nabíjet akumulátor o kapacitě 45 Ah tímto dvoucestně usměrněným proudem při účinnosti nabíjení $\eta = 0,6$?

Pro dvoucestně usměrněný proud je jeho maximální hodnota $I_m = \sqrt{2} I_{\text{eff}} = \sqrt{25} \doteq 7,07$ A. Pro střední hodnotu dvoucestně usměrněného průběhu platí:

$$I_0 = \frac{2}{\pi} 7,07 \doteq 4,5 \text{ A} \quad (3.19)$$

Kapacita akumulátoru představuje požadovaný elektrický náboj, který je třeba dodat akumulátoru tj. $Q = I_0 t$. Z toho potřebná doba nabíjení bude:

$$t = \frac{Q}{I_0} = 10 \text{ h} \quad (3.20)$$

Při respektování účinnosti η (přeměna elektrické energie na chemickou) se skutečná potřebná doba nabíjení prodlouží na $t' = t/0,6 = 16,6$ h.

3.2 Operátorová metoda

Laplaceova transformace. V roce 1785 francouzský matematik P.S. Laplace použil jistý typ integrální transformace, která zjednodušovala řešení integrálních rovnic. Operátorovou metodu řešení elektrických obvodů vypracoval v letech 1880 až 1887 anglický elektrotechnik a fyzik O. Heaviside. Metoda vycházela z potřeb řešit účinným způsobem přechodné děje v elektrických obvodech. Dosažené výsledky byly v souladu s experimentálními zkušenostmi, metoda ale postrádala matematické zdůvodnění. Matematický základ Heavisideově metodě poskytlo až zavedení Lebesguova integrálu v roce 1901 francouzským matematikem H.L. Lebesguem [26] a roku 1908 zavedení vztahu pro výpočet inverzní Laplaceovy transformace anglickým matematikem T.J.A. Bromwichem. Roku 1926 metodu rozpracoval americký elektrotechnik J.R. Carson [27] zavedením Carsonovy - Laplaceovy transformace. Dnes má Carsonova - Laplaceova transformace význam hlavně proto, že existují rozsáhlé slovníky obrazů této transformace a je poměrně snadný převod obrazů mezi Laplaceovou a Carsonovou - Laplaceovou transformací². Přesné matematické odvození Heavisideovy metody podal až roku 1953 polský matematik J. Mikusiński [28]. Laplaceova transformace je vhodně popsána pro uživatele například v [29].

Definice Laplaceovy transformace. Laplaceova transformace je definována vztahem:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad (3.21)$$

Zde p je komplexní proměnná $p = \sigma + j\omega$, σ kde ω jsou reálná čísla. Laplaceova transformace převádí tedy reálnou funkci reálné proměnné $f(t)$ na komplexní funkci komplexní proměnné $F(p)$. Funkce $f(t)$, zvaná originál je definována pro $t \geq 0$, a musí splňovat jisté matematické podmínky pro to, aby funkce $F(p)$, zvaná Laplaceův obraz, existovala. Tyto podmínky jsou pro funkce užívané pro výpočty v teorii obvodů (například konstanta, sinus, obdélník, trojúhelník) splněny³. Některé nejdůležitější originály a jejich Laplaceovy obrazy jsou v tabulce 3.1.

V teorii obvodů se často vyskytují funkce $F(p)$ ve tvaru racionální lomené funkce (to je podíl dvou algebraických polynomů v proměnné p). Nutná a postačující podmínka pro to, aby taková funkce byla Laplaceovým obrazem je, aby v čitateli byl polynom nižšího stupně, než polynom ve jmenovateli.

Zpětná Laplaceova transformace. Zpětná Laplaceova transformace je sice v obecném případě složitá, ale v případě racionálně lomených funkcí postupujeme obecně tak, že funkci $F(p)$ rozložíme na součet parciálních zlomků a

²Když Carsonův - Laplaceův obraz dělíme proměnnou p , dostaneme Laplaceův obraz.

³Aby Lebesguův integrál (3.21) konvergoval, stačí když funkce $f(t)$ je po úsecích spojitá a je exponenciálního řádu. Znamená to, že funkce může mít jen konečný počet nespojitostí prvního druhu tj. má pouze skoky na konečnou hodnotu (jako obdélníková funkce), a neroste strměji než exponenciální funkce. Například obraz funkce $\tan t$ neexistuje, protože funkce v bodech nespojitosti má nekonečně velké hodnoty.

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{p}$	$\delta(t)$	1
t	$\frac{1}{p^2}$	k	$\frac{k}{p}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Tabulka 3.1: Některé významné originály $f(t)$ a Laplaceovy obrazy $F(p)$. a, k, ω jsou reálné konstanty, $\varepsilon(t)$ je jednotkový skok (Heavisidova funkce), $\delta(t)$ je Diracova distribuce (Diracův impuls).

k nim dle slovníku Laplaceovy transformace vyhledáme originály $f_i t$. Hledaný výsledný originál je pak dle věty o linearitě dán součtem těchto originálů.

Použití rozkladu na parciální zlomky. Při rozkladu funkce na parciální zlomky vycházíme z tvaru funkce

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} \quad (3.22)$$

kde a_i a b_i jsou reálné koeficienty, m a n jsou přirozená čísla $m < n$. Funkci přepíšeme na tvar

$$F(p) = \frac{A(p)}{b_n(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} \quad (3.23)$$

kde čísla p_i jsou kořeny jmenovatele. Funkci $F(p)$ lze pak zapsat jako součet konečného počtu zlomků typu

$$\frac{A_i}{p-p_i} \quad \text{případně} \quad \frac{B_k}{(p-p_i)^k} + \frac{B_{k-1}}{(p-p_i)^{k-1}} \dots + \frac{B_1}{(p-p_i)} \quad (3.24)$$

kde p_i jsou kořeny jmenovatele. Kořeny jsou buď reálné nebo komplexně sdružené. A_i a B_k jsou konstanty, které mohou být také reálné nebo komplexní. V případě zlomku s A_i se jedná o jednoduchý kořen, v případě B_k je kořen násobnosti k . Pak jednotlivým zlomkům, které představují Laplaceovy obrazy, odpovídají tyto originály

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_i}{p-p_i} \right\} = A_i e^{p_i t} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B_k}{(p-p_i)^k} \right\} = B_k \frac{t^{k-1} e^{p_i t}}{(k-1)!} \quad (3.25)$$

Podle věty o linearitě Laplaceovy transformace, je hledaná funkce $f(t)$ součtem jednotlivých originálů všech parciálních zlomků. V případě jednoduchých kořenů p_1 a p_2 je pak $f(t)$ zapsána

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \dots \quad (3.26)$$

V případě násobných kořenů, například pro trojnásobný kořen p_1 je funkce $f(t)$

$$f(t) = B_3 \frac{t^2}{2!} e^{p_1 t} + B_2 t e^{p_1 t} + B_1 e^{p_1 t} \quad (3.27)$$

Při rozkladu je nutno vypočítat konstanty A_i a B_k . V případě jednoduchých kořenů počítáme A_i podle vztahu⁴

$$A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} (p - p_i) F(p) \quad (3.28)$$

Ve vztahu nejprve krátíme jmenovatel výrazem $(p - p_i)$ a pak počítáme limitu dosazením za $p = p_i$. V případě k násobného kořene p_i počítáme koeficienty B_k až B_1 podle vztahů

$$\begin{aligned} B_k &= \lim_{p \rightarrow p_i} (p - p_i)^k F(p) \\ B_{k-1} &= \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d}{dp} [(p - p_i)^k F(p)] \\ B_{k-2} &= \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} [(p - p_i)^k F(p)] \\ &\vdots \\ B_1 &= \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} [(p - p_i)^k F(p)] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Použití Heavisideovy věty. Protože racionálně lomené funkce $F(p)$ vyskytující se v teorii lineárních obvodů často nemají násobné kořeny ve jmenovateli, lze pro nalezení originálu využít druhou Heavisideovu větu o rozkladu. Zde je tato věta modifikována pro tři nejčastější případy. První dva vzorce jsou pro napájení obvodu s libovolnou časovou závislostí, poslední vzorec je pro harmonické napájení obvodu.

Pokud funkce $F(p)$ je ve tvaru

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \quad (3.30)$$

kde $A(p)$ je polynom čitatele, $B(p)$ je polynom jmenovatele. Potom originál je určen vztahem

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \quad (3.31)$$

⁴Z matematického hlediska při výpočtu A_i a B_i jde vlastně o výpočet reziduí komplexní funkce $F(p)$ komplexní proměnné v jejích pólech.

kde p_k jsou kořeny jmenovatele $B(p)$ a $B'(p)$ je první derivace polynomu jmenovatele podle proměnné p .

Pokud funkce $F(p)$ je ve tvaru

$$F(p) = \frac{A(p)}{pB(p)} \quad (3.32)$$

Potom originál je určen vztahem

$$f(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t} \quad (3.33)$$

Pokud funkce $F(p)$ je ve tvaru:

$$F(p) = \frac{A(p)}{(p - j\omega)B(p)} \quad (3.34)$$

Potom originál je určen vztahem

$$f(t) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{(p_k - j\omega)B'(p_k)} e^{p_k t} \quad (3.35)$$

Ať počítáme funkci $f(t)$ rozkladem na parciální zlomky, nebo užitím Heavisideovy věty, tak v případě pokud jsou kořeny p_i komplexně sdružené je potřeba výsledek $f(t)$ upravit, protože řešení $f(t)$ je reálná funkce reálné proměnné. Při úpravě využijeme převod komplexních čísel pomocí Eulerova vztahu. Máme-li dva komplexně sdružené kořeny $p_1 = x + jy$ a $p_1^* = x - jy$ pak platí

$$e^{p_1 t} = \cos xt + j \sin yt \quad e^{p_1^* t} = \cos xt - j \sin yt \quad (3.36)$$

Konstanty B_i jsou také komplexní. Imaginární části výrazů se po roznásobení a sečtení vyruší a konečný výraz typu $r \cos yt + s \sin yt$, kde r, s jsou reálná čísla, převedeme na jedinou goniometrickou funkci podle vztahu (7.3) tomu odpovídá

$$\sqrt{r^2 + s^2} \sin(yt + \varphi) \quad \text{kde} \quad \varphi = \arctan \frac{r}{s} \quad (3.37)$$

Jednotkový skok a Diracova distribuce. V teorii lineárních obvodů jsou užívány také dvě následující funkce $f(t)$. Obě jsou na obrázku 3.4. Funkce $\varepsilon(t)$ se nazývá jednotkový skok, nebo také Heavisideova funkce. Je definována jako

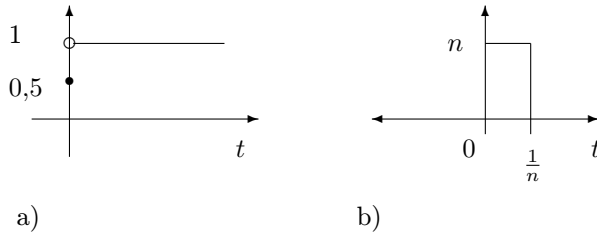
$$f(t) = 0,5 \text{ pro } t = 0 \quad f(t) = 1 \text{ pro } t > 0 \quad f(t) = 0 \text{ pro } t < 0 \quad (3.38)$$

Hodnota 0,5 pro $t = 0$ je zavedena proto, aby bylo vzájemně jednoznačné přiřazení mezi originálem a obrazem. Funkce jednotkového skoku slouží pro získání přechodové charakteristiky elektrického obvodu.

Pak máme ještě Diracovu distribuci⁵ $\delta(t)$ zvanou také Diracův impuls. Název funkce se pro $\delta(t)$ nepoužívá, protože nejde o funkci⁶, ale o distribuci. Diracova

⁵Zavedl ji [30] roku 1930 anglický jaderný fyzik, matematik a elektronik P.A.M. Dirac z potřeby vyjádřit derivaci funkcí v bodech nespojitostí prvního druhu tj. skocích.

⁶Funkce je vzájemně jednoznačně zobrazení z množiny čísel definičního oboru množině funkčních hodnot.



Obrázek 3.4: Časové průběhy a) Heavisideovy funkce (jednotkového skoku) $\varepsilon(t)$, b) Diracovy distribuce (Diracova impulsu) $\delta(t)$. $n \rightarrow \infty$, doba trvání $\Delta t \rightarrow 0$.

distribuce je definována jako impuls, jehož doba trvání $\Delta t = 1/n$ se blíží libovolně k nule a jeho velikost n se blíží k nekonečné hodnotě. Součin $n \cdot \Delta t$ je v limitě roven jedné. Platí, že

$$\delta(t) = 0 \text{ pro } t \neq 0 \quad \delta(0) = \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.39)$$

To, že plocha Diracova impulsu je rovna jedné lze odvodit jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/n} n \cdot dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} \right) = 1 \quad (3.40)$$

Za $\delta(t)$ jsme dosadili vyjádření podle obrázku 3.4b), pak byl vypočítán určitý integrál a nakonec limita s použitím L' Hospitalova pravidla. Diracova distribuce $\delta(t)$ nesplňuje všechny požadavky na originál $f(t)$ a její Laplaceův obraz nemá vlastnosti Laplaceova obrazu. Diracova distribuce slouží k získání impulsní charakteristiky obvodu. V praxi je možno realizovat Diracův impuls s dostatečnou přesností impulsem s velmi krátkou dobou trvání a s přiměřenou velkou amplitudou s ohledem na životnost obvodu.

Základní zákony a modely obvodových prvků při užití Laplaceovy transformace.

V teorii lineárních obvodů má reálná proměnná t význam času, komplexní proměnnou $p = \sigma + j\omega$ nazýváme komplexním kmitočtem. Termín komplexní kmitočet je užíván zejména v teorii elektrických filtrů. Proměnná ω má pro $\omega \geq 0$ význam fyzikálně reálného úhlového kmitočtu. Proměnná σ nemá fyzikálně reálný význam. Komplexní kmitočet p má fyzikální rozměr reciprokého času, jednotkou je 1 s^{-1} a proměnná t je čas, jednotkou je 1 s. Užitím Laplaceovy transformace dochází obecně ke změně fyzikálního rozměru originálu⁷. Například Laplaceův

⁷U Carsonovy-Laplaceovy transformace, dříve užívané místo Laplaceovy transformace mají originál i obraz stejný fyzikální rozměr.

obraz elektrického proudu $I(p)$ vyjde v jednotkách A · s, obraz elektrického napětí $U(p)$ vyjde v jednotkách V · s. To lze ukázat na příkladu Laplaceových obrazů konstantního proudu I nebo napětí U . Platí pro ně

$$\mathcal{L}\{I\} = I(p) = \frac{I}{p} \quad \mathcal{L}\{U\} = U(p) = \frac{U}{p} \quad (3.41)$$

Kirchhoffovy zákony. V důsledku věty o linearitě Laplaceovy transformace mají Kirchhoffovy zákony stejný formální tvar i v operátorovém vyjádření pro hodnoty napětí a proudu, jako v případě okamžitých hodnot. Lze tedy psát pro Kirchhoffovy zákony v operátorovém vyjádření:

$$\sum_{k=0}^n I_k(p) = 0 \quad \sum_{k=0}^n U_k(p) = 0 \quad (3.42)$$

kde $I(p)$ a $U(p)$ jsou Laplaceovy obrazy příslušných větvových proudů a napětí opatřených odpovídajícími znaménky ve smyslu algebraického součtu. Také metody pro řešení elektrických obvodů zůstávají v platnosti i pro Laplaceovy obrazy proudů a napětí $U(p)$, $I(p)$.

Operátorová impedance. Je definován podíl Laplaceova obrazu napětí a Laplaceova obrazu proudu a označuje se jako operátorová impedance⁸. $Z(p)$. Proměnná p bývá vyznačena, pokud je to účelné. Platí

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} \quad (3.43)$$

Definice $Z(p)$ je zobecněním definice elektrického odporu. $Z(p)$ že má fyzikální rozměr elektrického odporu a její hlavní jednotkou je Ω . Operátorová admittance $Y(p)$ je definována jako převrtná hodnota operátorové impedance a má fyzikální rozměr elektrické vodivosti. Operátorová impedance $Z(p)$ ale nemusí mít obecně vlastnosti⁹ Laplaceova obrazu $F(p)$, protože zde jde o podíl dvou Laplaceových obrazů a ne o Laplaceův obraz podílu napětí a proudu. Operátorová impedance nebo admittance pasivního obvodu je racionální lomenou funkcí proměnné p a stupeň polynomu v čitateli a jmenovateli se od sebe liší nejvýše o jedničku. Tuto vlastnost odvodil německý elektrotechnik O.W.H.O. Brune a publikoval v roce 1931 v [31]. V teorii kmitočtových filtrů se $Z(p)$ nebo $Y(p)$ pasivního obvodu nazývá Bruneovou funkcí. Operátorová impedance má reálnou část a imaginární část (obdobně to platí i pro admittance). Rozdělení částí lze provést dosazením do výrazu pro $Z(p)$ či $Y(p)$ za proměnnou $p = \sigma + j\omega$. Po provedení potřebných algebraických úkonů je možno oddělit reálnou a imaginární část. Rozdělení impedance $Z(p)$ či admittance $Y(p)$ na reálnou a imaginární část se užívá ke studiu vlastností těchto funkcí v teorii elektrických filtrů.

⁸V literatuře není jednotka v názvu této impedance. Užívají se také názvy komplexní či obrazová impedance, což je zavádějící, protože tyto impedance mají jiné definice.

⁹Laplaceův obraz $F(p)$ je holomorfní funkce v pravé polorovině pro $\text{Re } p > \sigma_1$ a musí splňovat věty o limitách [29].

Modely základních prvků. Na základě vztahu pro napětí na indukčnosti a věty o Laplaceově obrazu derivace lze psát:

$$U(p) = \mathcal{L} \left\{ L \frac{di}{dt} \right\} = pLI(p) - Li(0+) \quad (3.44)$$

Rovnici (3.44) lze přiřadit ekvivalentní elektrický obvod, kde člen $Li(0+)$ představuje obraz ideálního napěťového zdroje vyjadřujícího případnou nenulovou počáteční podmínku a člen pL představuje operátorovou impedanci indukčnosti.

Operátorová impedance elektrického odporu je R tj. speciální případ pro $Z(p) = R$. Na základě vztahu pro proud protékající indukčností a věty o Laplaceových obrazech integrálu a konstanty lze psát:

$$I(p) = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{L} \int_0^t u(x)dx + i(0+) \right\} = \frac{1}{pL} U(p) + \frac{i(0+)}{p} \quad (3.45)$$

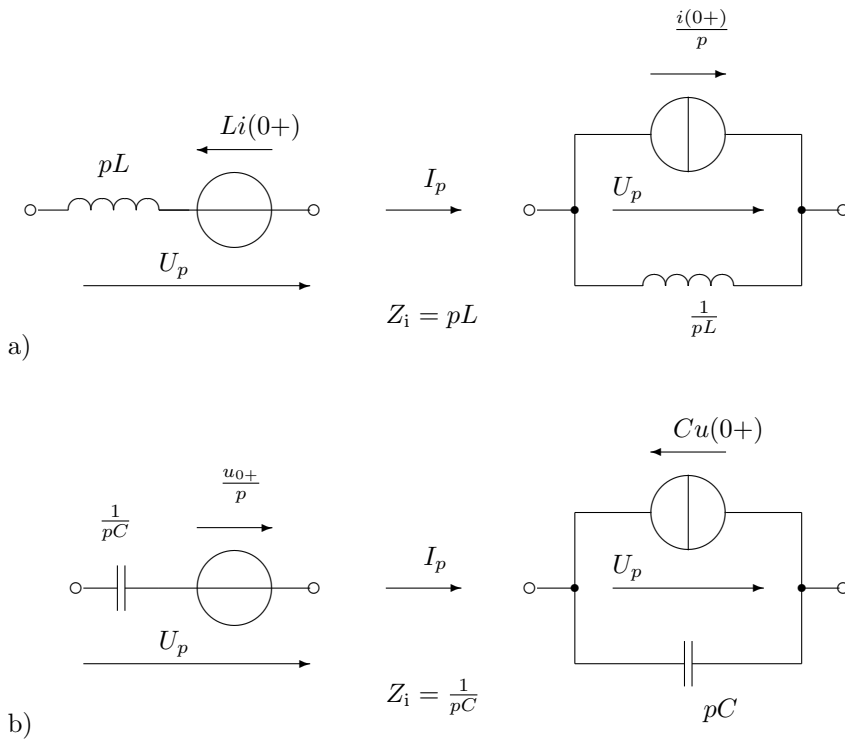
Rovnici (3.45) lze přiřadit ekvivalentní elektrický obvod, kde člen $i(0+)/p$ představuje Laplaceův obraz ideálního proudového zdroje vyjadřujícího případnou nenulovou počáteční podmínku a člen $1/pL$ představuje operátorovou admitanci indukčnosti. Obdobně lze odvodit i vztahy (3.46) pro obrazy proudu a napětí na kapacitě.

$$I(p) = pCU_p - Cu(0+) \quad U(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u(0+)}{p} \quad (3.46)$$

kde pC je operátorová admitance kapacity. Ekvivalentní elektrické obvody odpovídající rovnicím (3.44) (3.45) (3.46) jsou na obrázku 3.5. Schémata jsou univerzální, platí pro jakýkoli časový průběh obvodových veličin, který splňuje podmínky Laplaceovy transformace. Vyznačené počáteční podmínky v podobě zdrojů se uplatní zejména při řešení přechodných dějů. Při jiných výpočtech pokud jde o obecný popis obvodu v harmonickém ustáleném stavu (například v teorii filtrů) se s těmito zdroji nepočítá a užívají se jen operátorové impedance a admitance.

3.3 Symbolická metoda.

Metodu zavedl roku 1893 americký elektrotechnik C.P. Steinmetz [32]. Metodu lze uplatnit jen pro řešení elektrických obvodů napájených harmonickými zdroji proudu či napětí stejného kmitočtu, za předpokladu, že elektrický obvod se nachází v harmonickém ustáleném stavu. Harmonický časový průběh je popsán funkcí sinus nebo kosinus. Ustálený stav znamená, že v čase t_0 ke kterému se vztahuje řešení se v elektrickém obvodu již nevyskytují přechodné děje. Předpokládá se, že uplynula již dostatečně dlouhá doba od okamžiku vzniku přechodného děje. To je ekvivalentní tvrzení, že libovolně dlouho před časem t_0 tj. pro čas $-\infty < t < t_0$ a libovolně dlouho po čase t_0 tj. pro čas $t_0 > t > \infty$ v elektrickém obvodu působí příslušné harmonické zdroje. Metoda vznikla z potřeby řešit početně výhodnou metodou elektrické obvody pro nejčastěji se vyskytující případy v praxi. Metoda je výhodná, protože odstraňuje těžkopádné



Obrázek 3.5: Operátorové modely kapacity a indukčnosti.

výpočty ke kterým vede vyjádření okamžitých hodnot obvodových veličin pomocí goniometrických funkcí. Přes zdánlivou složitost vyniknou její výhody při řešení složitějších obvodů s více obvodovými prvky ve srovnání s triviální metodou řešení založené na geometrickém znázornění obvodových veličin pomocí fázorových diagramů a uplatnění vzorců pro řešení trojúhelníků.

Podstata metody. Při řešení elektrického obvodu v harmonickém ustáleném stavu je potřeba znát dva údaje o každé obvodové veličině tj. její velikost V a fázový úhel φ . Oba tyto údaje jsou obsažené jak v okamžitém vyjádření veličiny pomocí goniometrických funkcí, tak i v jejím symbolickém vyjádření. Symbolická metoda převádí výpočty na počítání s komplexními čísly. Komplexní čísla znázorňujeme pomocí vektorů v komplexní rovině. Poloha vektoru je jednoznačně určena velikostí orientované úsečky (modulem) a úhlem, který svírá s osou x souřadného systému. Velikost obvodové veličiny V odpovídá modulu a fázový úhel veličiny φ odpovídá úhlu komplexního čísla.

Odvození metody. Matematickým základem metody je Eulerův vztah mezi goniometrickým a exponenciálním zápisem komplexního čísla z

$$z = x + jy = |z|(\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)) = |z|e^{j(\alpha)} \quad (3.47)$$

kde α je úhel který svírá v komplexní rovině x a jy vektor o velikosti $|z|$ s reálnou osou x . Okamžitá hodnota harmonické obvodové veličiny je vyjádřena obecně vztahem:

$$i = \sqrt{2}I_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{nebo} \quad u = \sqrt{2}U_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.48)$$

kde ω je úhlový kmitočet, platí $\omega = 2\pi f$, kde f je kmitočet, φ je fázový úhel, t je čas.

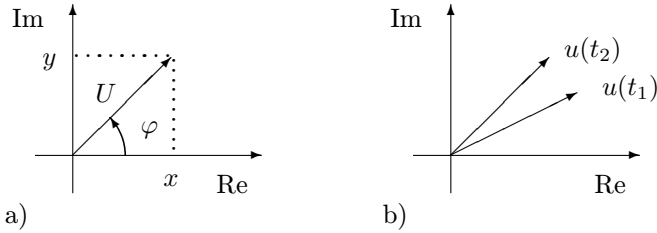
Dosazením do rovnice (3.47) za $\alpha = \omega t + \varphi$ lze psát:

$$z = |z|(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) = |z|e^{j(\omega t + \varphi)} = |z|e^{j\varphi}e^{j\omega t} \quad (3.49)$$

Na základě tohoto vztahu lze symbolicky přiřadit imaginární část komplexního čísla z obvodové veličině z z rovnice (3.47).

$$u = \sqrt{2}U_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \text{Im} \left(\sqrt{2}U_{\text{eff}} e^{j\varphi}e^{j\omega t} \right) = \text{Im} \left(\sqrt{2}U e^{j\omega t} \right) \quad (3.50)$$

Symbol pro imaginární část Im ale v běžném zápisu při výpočtech nepíšeme. Rovnocenně obdobně lze provést symbolické přiřazení také pro funkci kosinus a reálnou část komplexního čísla z , protože funkce \cos a \sin se od sebe liší jen stálým fázovým posunem o 90° . Při konkrétních výpočtech lze volit symbolické přiřazení dle početně výhodnějšího postupu. Většinou se dává přednost \sin . S komplexními čísly se pak provede řešení úlohy. Jako hledané řešení se uvažuje jen ta část výsledku, která odpovídá původní goniometrické funkci, která byla v přiřazení použita. Komplexní číslo získané tímto přiřazením je tvořeno součinem dvou členů. Jeden je závislý na čase t , druhý pouze na fázovém úhlu φ .



Obrázek 3.6: Znázornění fázoru v komplexní rovině. a) fázor napětí U b) polohy rotujícího fázoru u v čase t_1 a t_2 , $t_1 < t_2$.

Komplexní amplituda, fázor, komplexor. Komplexní amplituda je komplexní číslo U_M

$$U_M = U_m e^{j\varphi} \quad (3.51)$$

kde U_m je amplituda. Geometrickým znázorněním komplexní amplitudy je vektor v Gaussově rovině o velikosti U_m a úhlu φ měřeném v kladném smyslu. Fázor je komplexní číslo U definované jako.

$$U = U_{\text{eff}} e^{j\varphi} \quad (3.52)$$

Na obrázku 3.6a) je fázor napětí U . Fázor je jednoznačně určen buď velikostí vektoru $|U|$ a úhlem φ nebo souřadnicemi x a y na osách. Platí

$$U = x + jy = |U|e^{j\varphi} \quad \text{kde} \quad |U| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \frac{y}{x} \quad (3.53)$$

Reálnou a imaginární složku také zapisujeme jako

$$x = \text{Re } U = |U| \cos \varphi \quad y = \text{Im } U = |U| \sin \varphi \quad (3.54)$$

Rotující fázor, nebo také komplexor je komplexní číslo označené jako u definované vztahem

$$u = U_{\text{eff}} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = U e^{j\omega t} \quad (3.55)$$

Rotující se nazývá proto, že v závislosti na čase se v Gaussově rovině mění jeho poloha, tedy symbolicky vyjadřuje okamžitou hodnotu veličiny. Jeho průmět do imaginární osy určuje okamžitou hodnotu obvodové veličiny pokud je veličině přiřazena funkce sinus. Průmět do reálné osy je okamžitá hodnota, pokud je přiřazena funkce cosinus, úhel komplexoru s reálnou osou určuje okamžitou fázi. Rotující fázor se otáčí v komplexní rovině s rostoucím časem kolem svého počátečního bodu úhlovým kmitočtem ω v kladném smyslu tj. proti pohybu hodinových ručiček. Příklad rotujícího fázoru je na obrázku 3.6b).

Postupy při výpočtech. Při výpočtech se používají z praktických důvodů většinou fázory a ne komplexní amplitudy, protože přístroje jsou konstruovány tak, že měří většinou efektivní hodnoty. Při řešení elektrických obvodů se běžně počítá z důvodu přehlednosti výpočtů jen s fázory a ne s rotujícími fázory, protože jde o harmonicky ustálený stav obvodu a vzájemná poloha fázorů se při rotaci v rovině nemění. Při algebraických operacích s fázory je potřeba z důvodu usnadnění výpočtů převádět je ze složkového, nebo-li algebraického tvaru na exponenciálního vyjádření podle vztahu (3.53) (ten je vhodný pro dělení a násobení komplexních čísel) a z exponenciálního tvaru na složkový tvar podle vztahu (3.54) (ten je vhodný pro sčítání a odčítání komplexních čísel). Pro usnadnění zápisu exponenciálního vyjádření se užívá zápis:

$$U = U_{\text{eff}} e^{j\varphi} = U_{\text{eff}} \angle\varphi \quad (3.56)$$

Vyznačí se tedy jen velikost dané veličiny a fázový úhel. Fázor zapsaný pomocí symbolu \angle se někdy označuje jako vektor.

Základní zákony a modely obvodových prvků při symbolické metodě.

Kirchhoffovy zákony. Kirchhoffovy zákony nemění svůj formální tvar. Jde o algebraické součty okamžitých hodnot větrových proudů případně napětí. Přiřadíme-li těmto větrovým veličinám jejich odpovídající rotující fázory a zachováme-li algebraická znaménka orientace původních veličin, lze v rovnicích vždy vykrátit společný součinitel $\exp(j\omega t)$ a dostaneme pro první Kirchhoffův zákon:

$$\sum_{k=1}^n \pm I_k \text{ eff } e^{j\varphi_k} e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \sum_{k=1}^n \pm I_k = 0 \quad \text{kde} \quad I_k = I_k \text{ eff } e^{j\varphi_k} \quad (3.57)$$

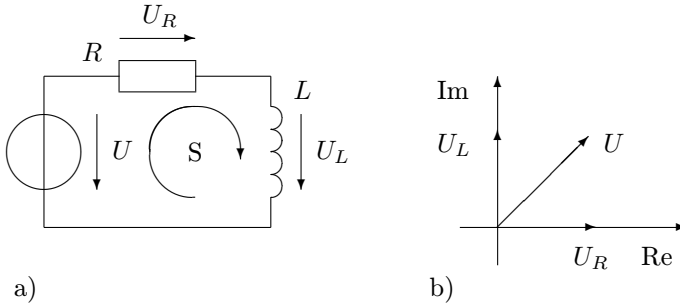
Symbolem \pm je zde zdůrazněno přiřazení orientace jednotlivým veličinám. Lze tedy psát:

$$\sum_{k=1}^n \pm I_k = 0 \quad (3.58)$$

Obdobně dostaneme pro druhý Kirchhoffův zákon:

$$\sum_{k=1}^n \pm U_k = 0 \quad (3.59)$$

Zde je třeba si uvědomit, že oba Kirchhoffovy zákony platí zde pro fázory a jde tedy o součty a rozdíly komplexních čísel. V geometrickém znázornění jde o vektorové součty či rozdíly. Je třeba si uvědomit, že měřicí přístroje (voltmetry, ampérmetry) zpravidla udávají jen velikost příslušných fázorů, ale ne jejich úhel.



Obrázek 3.7: Příklad na Kirchhoffův zákon pro fázory. a) obvod b) fázorový diagram napětí.

Příklad na druhý Kirchhoffův zákon pro fázory. Na obrázku 3.7a) je jednoduchý elektrický obvod. Pro harmonický ustálený stav je efektivní napětí zdroje $U = 10$ V, kmitočet 50 Hz, odpor $R = 30$ Ω , indukčnost $L = 0,1$ H. Pro označené orientace napětí platí dle druhého Kirchhoffova zákona podle orientované smyčky S rovnice

$$-U + U_R + U_L = 0 \quad (3.60)$$

Napětí U_R a U_L lze vypočítat podle vztahů

$$U_R = U \frac{R}{R + j\omega L} \quad U_L = U \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \quad (3.61)$$

Pro zadané hodnoty uvažujeme pro usnadnění výpočtů že fáze napětí zdroje je $\varphi = 0$. Pak vyjdou hodnoty napětí

$$U = 10 \angle 0 \text{ V} \quad U_R = 6,906 \angle -0,808 \text{ V} \quad U_L = 7,232 \angle 0,762 \text{ V} \quad (3.62)$$

Úhly jsou v radiánech. Fázory jsou znázorněny na obrázku 3.7b). Ve srovnání s vypočtenými hodnotami je fázorový diagram pootočen. Při výpočtech jsme uvažovali fázor U s úhlem nula a ve fázorovém diagramu je kreslen U_R s úhlem nula. To ale vůbec nevádí, protože vzájemné úhly mezi fázory zůstanou při otočení diagramu v rovině zachovány. Tento postup je běžný, protože se upřednostňuje hledisko usnadnit výpočty a usnadnit kreslení fázorových diagramů. Dosadíme-li vypočtené hodnoty do rovnice (3.60), tak dostaneme

$$-10e^{j0} + 6,906e^{-j0,808} + 7,232e^{j0,762} = 3,72 \cdot 10^{-3} \angle 9,6 \cdot 10^{-2} \doteq 0 \quad (3.63)$$

Vypočtené hodnoty tedy vyhovují druhému Kirchhoffovu zákonu. Měřicí přístroj voltmetr by nám ukázal pouze hodnoty $U = 10$ V, $U_R = 6,906$ V a $U_L = 7,232$ V. To jsou jen velikosti fázorů. Pokud bychom dosadili tyto hodnoty do rovnice (3.60), tak dostaneme výsledek 4,138 V. Bez znalosti údajů o fázových úhlech není možno ověřit, zda napětí vyhovují druhému Kirchhoffovu zákonu.

Komplexní impedance. Elektrický odpor je definován jako podíl napětí a proudu, tedy po dosazení za rotující fázy napětí a proudu dostaneme:

$$Z = \frac{U_{\text{eff}} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}}{I_{\text{eff}} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = |Z| \angle(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3.64)$$

Tímto vztahem je definována komplexní impedance Z a má fyzikální rozměr elektrického odporu. Je to pojem který platí jen pro symbolickou metodu. Z definice komplexní impedance plyne, že platí

$$|Z| = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \quad (3.65)$$

Z počtu s komplexními čísly plyne pro komplexní impedanci

$$|Z| = \sqrt{(\text{Re } Z)^2 + (\text{Im } Z)^2} \quad \varphi = \arctan \frac{\text{Im } Z}{\text{Re } Z} \quad (3.66)$$

Obvodové modely základních prvků, komplexní reaktance. Pro základní obvodové prvky platí pro symbolickou metodu následující vztahy. Vyjde se z vyjádření okamžité hodnoty napětí a proudu jako rotujících fázorů. Pro elektrický odpor dle Ohmova zákona platí:

$$u = Ri \quad \rightarrow \quad U e^{j\omega t} = R I e^{j\omega t} \quad \rightarrow \quad \frac{U}{I} = R \quad (3.67)$$

Na elektrickém odporu tedy nedochází k fázovému posunu mezi fázorem napětí a fázorem proudu, jak je to na obrázku 3.8a). Oba fázy se liší jen svou velikostí. Elektrický odpor R je dán poměrem efektivních hodnot napětí a proudu. Pro okamžitou hodnotu napětí na indukčnosti dostaneme:

$$u = L \frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad U e^{j\omega t} = L \frac{d(I e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L I e^{j\omega t} \quad (3.68)$$

Pak pro podíl rotujících fázorů napětí a proudu na indukčnosti platí:

$$jX_L = \frac{U}{I} = j\omega L \quad \rightarrow \quad X_L = \omega L \quad (3.69)$$

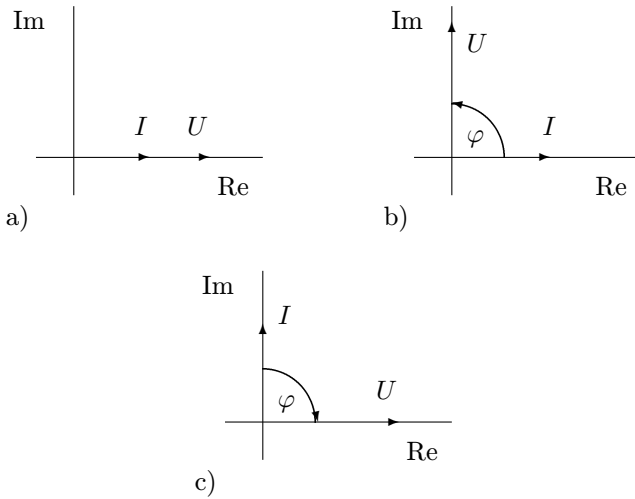
Veličina X_L se nazývá reaktance indukčnosti (induktivní reaktance). Fyzikálně představuje svou velikostí zdánlivý elektrický odpor, který klade indukčnost harmonickému proudu. Ze vztahu (3.68) plyne, že fázor napětí je v komplexní rovině posunut o 90° proti směru hodinových ručiček vzhledem k fázoru proudu (násobení imaginární jednotkou j znamená rotaci fázoru o 90° v kladném smyslu), což se vyjadřuje tvrzením, že na indukčnosti fázor napětí předbíhá fázor proudu o 90° . Polohy fázorů jsou na obrázku 3.8b).

Obdobně pro kapacitu dostaneme:

$$i = C \frac{du}{dt} \quad \rightarrow \quad I e^{j\omega t} = C \frac{d(U e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C U e^{j\omega t} \quad (3.70)$$

Pak pro podíl rotujících fázorů napětí a proudu na kapacitě platí:

$$-jX_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega C} \quad \rightarrow \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (3.71)$$



Obrázek 3.8: Polohy fázorů proudu a napětí u základních prvků. a) odpor $\varphi = 0$, b) indukčnost $\varphi = 90^\circ$, c) kapacita $\varphi = -90^\circ$.

Veličina X_C se nazývá reaktance kapacity (kapacitní reaktance). Představuje svou velikostí zdánlivý elektrický odpor, který klade kapacita harmonickému proudu. Ze vztahu (3.70) plyne, že fázor proudu je posunut o 90° proti směru hodinových ručiček vzhledem k fázoru napětí, což se vyjadřuje tvrzením, že na kapacitě fázor proudu předbíhá fázor napětí o 90° . Polohy fázorů jsou na obrázku 3.8c).

Reaktance byly dříve nazývány „jalový odpor“, což je nesprávné protože pojem elektrický odpor je spojen s průchodem stejnosměrného proudu. Uvedené vztahy mezi napětím a proudem je možno odvodit i z goniometrického vyjádření časových průběhů napětí a proudů (časový průběh jedné veličiny je pak popsán funkcí sinus a časový průběh druhé veličiny je popsán funkcí kosinus, takže fázový rozdíl mezi nimi je právě $\pm 90^\circ$).

Protože při symbolické metodě mají oba Kirchhoffovy zákony formálně stejný tvar jako v případě okamžitých hodnot, platí pro výpočet výsledné komplexní impedance při řazení obvodových prvků formálně stejná pravidla a stejné metody řešení elektrických obvodů. Jde zde tedy o počítání s komplexními čísly podle známých pravidel. Obecně tedy každá komplexní impedance má reálnou a imaginární část, což lze zapsat ve tvaru:

$$Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (3.72)$$

Vlastnosti komplexní impedance. Reálná část komplexní impedance tj. $R(\omega)$ se nazývá rezistance, v obecném případě může záviset na kmitočtu ω narozdíl od elektrického odporu. Tedy reálná část komplexní impedance a elektrický odpor nejsou obecně totožné pojmy. Imaginární část komplexní impedance tj.

$X(\omega)$ se nazývá reaktance a je vždy závislá na kmitočtu ω . Jako příklad kmitočtově závislé rezistance lze uvést komplexní impedanci paralelního spojení kapacity C a odporu R :

$$Z = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \frac{1 - j\omega RC}{1 - j\omega RC} = \frac{R - j\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2} \quad (3.73)$$

Komplexní admittance. Komplexní admittance Y je definována jako převratná hodnota komplexní impedance Z a obecně pro ni platí:

$$\frac{1}{Z} = Y(\omega) = G(\omega) + jB(\omega) \quad (3.74)$$

Reálná část komplexní admittance tj. $G(\omega)$ se nazývá konduktance, v obecném případě je závislá na kmitočtu ω na rozdíl od elektrické vodivosti. Imaginární část komplexní admittance tj. $B(\omega)$ se nazývá susceptance a je vždy závislá na kmitočtu ω . Komplexní admittance má fyzikální rozměr elektrické vodivosti a hlavní jednotkou je 1 S. Impedance a admittance bývají také označovány společným názvem imitance¹⁰.

3.4 Souvislost operátorových a komplexních imitancí.

Komplexní imitanci elektrického obvodu dostaneme formálně dosazením za proměnnou $p = j\omega$ do vztahu pro operátorovou imitanci.

Předpokládejme, že v elektrickém obvodu jsou proud a napětí popsány v harmonicky ustáleném stavu rovnicemi:

$$i = \sqrt{2}I_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi_1) \quad u = \sqrt{2}U_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (3.75)$$

Pro Laplaceův obraz funkce $\sin(\omega t + \varphi)$ platí:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \varphi)\} = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2} \quad (3.76)$$

Užitím tohoto vztahu lze psát pro obrazy napětí a proudu:

$$I(p) = \sqrt{2}I_{\text{eff}} \frac{p \sin \varphi_2 + \omega \cos \varphi_2}{p^2 + \omega^2} \quad U(p) = \sqrt{2}U_{\text{eff}} \frac{p \sin \varphi_1 + \omega \cos \varphi_1}{p^2 + \omega^2} \quad (3.77)$$

Operátorová impedance $Z(p)$ obvodu je pak podíl $U(p)/I(p)$:

$$Z(p) = \frac{U_{\text{eff}}(p \sin \varphi_1 + \omega \cos \varphi_1)}{I_{\text{eff}}(p \sin \varphi_2 + \omega \cos \varphi_2)} \quad (3.78)$$

Dosazením za $p = j\omega$ dostaneme:

$$Z(j\omega) = \frac{U_{\text{eff}}(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{I_{\text{eff}}(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3.79)$$

¹⁰Jde o spojení slov impedance a admittance.

Tentýž vztah dostaneme ale také pro komplexní impedanci obvodu vyjádříme-li proud a napětí pomocí fázorů jako

$$Z = \frac{U_{\text{eff}} \angle \varphi_1}{I_{\text{eff}} \angle \varphi_2} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \angle (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3.80)$$

Proto lze psát, že platí pro komplexní impedanci Z a operátorovou impedanci $Z(p)$

$$Z = Z(j\omega) \quad (3.81)$$

Je třeba si ale uvědomit, že jednak Laplaceovy obrazy a pak i operátorové impedance jsou definovány pro odlišné podmínky než komplexní impedance. Laplaceovy obrazy popisují obecněji proudy a napětí protože odpovídající časový průběh je uvažován včetně jeho počátku, což zahrnuje jak přechodný děj tak i ustálený stav v obvodu. Fázory popisují jen harmonický ustálený stav obvodu, tj. bez přechodných dějů. Proto například Laplaceovu obrazu proudu $I(p) = 1$ odpovídá časový průběh $i = \delta$, což je Diracův impuls. Fázoru efektivní hodnoty proudu $I = 1$ ale odpovídá časový průběh $i = \sqrt{2} \sin \omega t$.