redakce nakladatelství BEN – technická literatura
redakce@ben.cz

Napětí naprázdno

$$U_p = I \,.\, R_3 = \frac{U_{02}}{R_1 + R_2 + R_3} \,.\, R_3 = \frac{15}{625} \,.\, 500 = 12 \text{ V.}$$

Proud nakrátko

$$I_k = \frac{U_{02}}{R_1 + R_2} = \frac{15}{125} = 120 \text{ mA.}$$

Výpočet R_T podle vztahu uvedeného na *obr. 5.1.3*:

$$R_T = \frac{(R_1 + R_2) \,.\, R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{125 \,.\, 500}{625} = 100 \ \Omega.$$

Výpočet R_T ze vztahu (5.1.1):

$$R_T = \frac{U_p}{I_k} = \frac{12}{120 \,.\, 10^{-3}} = 100 \ \Omega.$$

V zapojení podle Thévenina bude U_T = 12 V, R_T = 100 Ω.
V zapojení podle Nortona bude I_N = 120 mA, $G_N = 1/R_T$ = 10 mS.

5.2 ANALÝZA OBVODŮ METODOU KIRCHHOFFOVÝCH ROVNIC

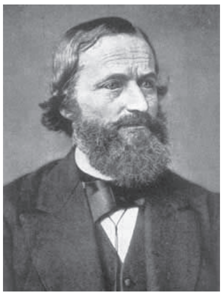
Kirchhoffovy zákony vycházejí z principu zachování energie a zachování náboje aplikovaného na elektrické obvody.

1) **Zákon zachování náboje – I. Kirchhoffův zákon (I. KZ)** Algebraický součet všech proudů I_k tekoucích do jednoho bodu (uzlu) je roven nule.

$$\sum_{m=1}^{n} I_m = 0 \qquad (5.2.1)$$

2) **Zákon zachování energie – II. Kirchhoffův zákon (II. KZ)** Algebraický součet napětí v uzavřené smyčce je roven nule.

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0 \qquad (5.2.2)$$



Gustav Robert Kirchhoff
(✶1824 †1887)

Jestliže chceme sestavit soustavu lineárně nezávislých rovnic na základě Kirchhoffových zákonů, stačí, aby:

- každá z nich obsahovala jeden proud, který není obsažen v žádné jiné rovnici;
- žádná z lineárně nezávislých rovnic neobsahovala napětí, které je obsaženo v jiné rovnici.

Určení nezávislých rovnic provedeme na základě topologického schématu zapojení. Při sestavování rovnic vycházíme ze schématu zapojení.

5.2.1 Použité názvosloví

Topologické schéma

Při vytváření topologického schématu vycházíme ze schématu zapojení analyzovaného obvodu (příklad schématu zapojení je na *obr. 5.2.1*). Při sestavování topologického schématu používáme tyto názvy:

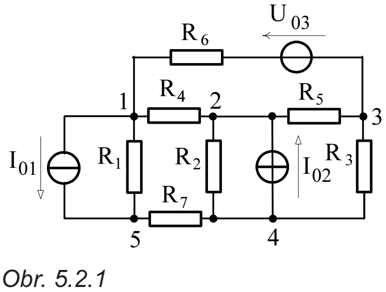
- **Uzel** je bod, ve kterém jsou spojeny dva nebo více obvodových prvků, na *obr. 5.2.1* jsou uzly označeny číslicemi.
- **Větev** je část obvodu mezi dvěma uzly, do které jsou zapojeny obvodové prvky.
- **Smyčka** je posloupnost konečného počtu větví, které na sebe v uzlech navazují a vytvářejí uzavřenou dráhu.

  V každém uzlu, který leží ve smyčce se smějí stýkat pouze dvě větve, které jsou součástí smyčky. Případné další větve vycházející z uzlu již musí být součástí jiných smyček.
- **Vztažný (referenční uzel)** je jeden z uzlů, který jsme zvolili a se kterým každý další uzel tvoří uzlovou dvojici.

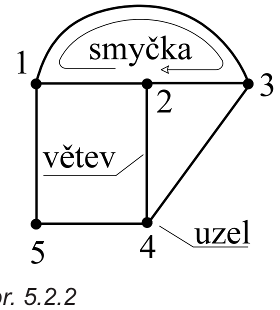
Ke vztažnému uzlu vztahujeme např. napětí z ostatních uzlů.

Zvolíme-li na *obr. 5.2.1* jako vztažný uzel 4, potom k němu vztahujeme napětí z uzlu 1, z uzlu 2 atd. Vztažnému uzlu často říkáme referenční uzel.

- **Úplný strom** obsahuje větve, které spojují všechny uzly, ale nevytvářejí přitom ani jednu smyčku. Sestrojení stromu je zpravidla jednoduché. Příklad je uveden na *obr. 5.2.3*. Úplný strom vytváří spojnice mezi uzly 1 a 2, 2 a 3, 2 a 4, 1 a 5.



Obr. 5.2.1
Příklad analyzovaného obvodu



Obr. 5.2.2
Topologické schéma k obr. 5.2.1

Je možné vybrat i jiné větve ke konstrukci úplného stromu, např. větev spojující uzly 5 a 4 místo větve spojující uzly 1 a 5.

- **Nezávislé větve** jsou větve, kterými doplníme úplný strom na topologické schéma. Všechny nezávislé větve tvoří doplněk stromu.
- **Nezávislá smyčka** je tvořena větvemi stromu a nezávislou větví.

Pojmy uzel a větev stromu jsou využívány, jak bude ukázáno dále, k výpočtu potřebného počtu nezávislých rovnic pro řešení obvodů metodou Kirchhoffových zákonů.

Je nutné si všimnout, že pokud mezi dvěma spojovacími body není žádný obvodový prvek, jedná se o jeden uzel, nikoliv o dva uzly, např. uzly 2 a 4 na *obr. 5.2.1*.

- **Orientační šipka** – orientační šipky zakreslujeme do schématu na počátku analýzy, kdy ještě přesně neznáme polarity napětí a směry proudů v obvodu. Zvolených orientací se musíme po celou dobu výpočtu držet, nesmíme ji měnit. Teprve potom, když řešením rovnic dostaneme číselné hodnoty včetně znamének, určíme skutečné směry šipek.

  Kreslíme-li napěťovou šipku např. z uzlu 1 do uzlu 2, předpokládáme tím, že v uzlu 1 je vůči uzlu 2 kladné napětí U_{12}. Jeho velikost potom určíme jako rozdíl napětí U_1 a U_2 : $U_{12} = U_1 - U_2$, nikoliv naopak.

5.2.2 Výpočet metodou Kirchhoffových rovnic

Kirchhoffovy zákony jsou obsaženy ve vztazích (5.2.1) a (5.2.2).

Určení počtu Kirchhoffových rovnic

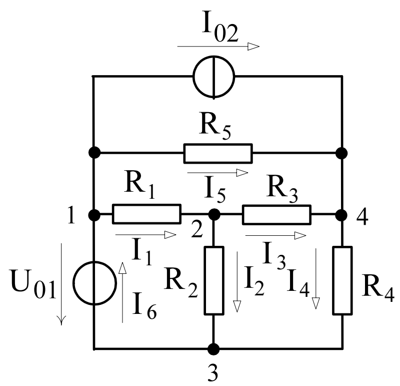
Označme: počet uzlů ve schématu u;
počet větví v.

Počet nezávislých rovnic p pro proudy ve větvích určíme pomocí vztahu:

$$p = u - 1 \quad \text{(I. Kirchhoffův zákon, I. KZ)} \qquad (5.2.3)$$

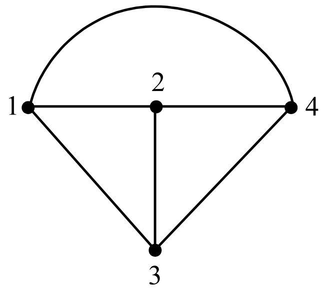
Počet nezávislých smyček s bude:

$$s = v - p \quad \text{(II. Kirchhoffův zákon II. KZ)} \qquad (5.2.4)$$



Obr. 5.2.3
Zapojení obvodu pro příklad výpočtu

Postup výpočtu si vysvětlíme na příkladu



Obr. 5.2.4
Topologické schéma pro příklad výpočtu

Uvažujme zapojení obvodu podle *obr. 5.2.4*. Jsou známy parametry napájecích zdrojů i parametry všech dvojpólů zapojených do obvodu.

Jako vztažný uzel uvažujme uzel 4.

Počet uzlů: $u = 4$,

Počet všech větví $v = 6$.

Počet nezávislých rovnic pro I. KZ:

$$p = u - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Počet nezávislých rovnic pro II. KZ:

$$s = v - p = 6 - 3 = 3.$$

V dalším textu budeme označovat proudy tekoucí ven z uzlu s kladným znaménkem.

Rovnice pro I. Kirchhoffův zákon (I. KZ) podle uvedeného schématu:

uzel 1: $-I_6 + I_1 + I_5 + I_{02} = 0$

uzel 2: $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$

uzel 3: $-I_4 - I_2 + I_6 = 0$

Rovnice pro II. Kirchhoffův zákon (II. KZ):

smyčka {1,2,3} $-U_{01} + I_1 \,.\, \mathrm{R}_1 + I_2 \,.\, R_2 = 0$

smyčka {3,2,4} $-I_2 \,.\, \mathrm{R}_2 + \mathrm{I}_3 \,.\, \mathrm{R}_3 + I_4 \,.\, R_4 = 0$

smyčka {1,4,2} $I_5 \,.\, \mathrm{R}_5 - I_3 \,.\, \mathrm{R}_3 - I_1 \,.\, R_1 = 0$

Tím jsme dostali soustavu 6 nezávislých rovnic s šesti neznámými veličinami I_1 až I_6. Jednotlivé proudy a napětí dostaneme jejich řešením.

Příklad:

Vypočítejte, jak velký proud prochází v zapojení podle *obr. 5.2.5* jednotlivými odpory.

Určete napětí na rezistoru R_3.

Hodnoty odporů a napětí napájecích zdrojů jsou následující:

$R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$;

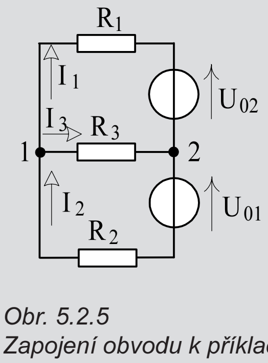
$U_{01} = 4{,}5$ V, $U_{02} = 2$ V.

Počet uzlů: $u = 2$;

počet větví: $v = 3$.

Počet rovnic pro I. KZ: p = u – 1 = 1

počet rovnic pro II. KZ: s = v – p = 2.



Obr. 5.2.5
Zapojení obvodu k příkladu

Uzel 2 zvolme jako referenční.
Rovnice pro I. KZ v uzlu 1: $-I_2 + I_3 + I_2 = 0$
Rovnice pro II. KZ
horní smyčka $R_1 . I - U_{02} - R_3 . I_3 = 0$ po dosazení: $5 . I_1 - 2 - 4 . I_3 = 0$
dolní smyčka $R_2 . I_2 + R_3 . I_3 - U_{01} = 0.$ $2 . I_2 + 4 . I_3 - 4{,}5 = 0.$

Postupným řešením dostaneme:

a)
$-I_1 + I_2 - I_3 = 0$
$5.I_1 - 4.I_3 - 2 = 0$
$\underline{4.I_3 + 2I_2 - 4{,}5 = 0}$

b)
$I_3 = I_2 - I_1$
$I_3 = \dfrac{5I_1 - 2}{4}$

c)
$5.I_1 - 4.(I_2 - I_1) - 2 = 0$
$\underline{4.(I_2 - I_1) + 2.I_2 - 4{,}5 = 0}$

d)
$9.I_1 - 4.I_2 - 2 = 0 \quad /.6$
$\underline{-4.I_1 + 6.I_2 - 4{,}5 = 0 \quad /.4}$

e)
$54 . I_1 - 24.I_2 - 12 = 0$
$\underline{-16.I_1 + 24 . I_2 - 18 = 0}$

f)
$38 . I_1 = 30$
$I_1 = \dfrac{30}{38} = \underline{\underline{0{,}789 A}}$

g)
$I_3 = \dfrac{5 . I_1 - 2}{4} =$
$= \dfrac{5 . 0{,}789 - 2}{4} = \underline{\underline{0{,}486 A}}$

h)
$I_2 = I_1 + I_3 = \underline{1{,}275 \text{ A.}}$

Napětí na odporu R_3 *bude*

$U_{R3} = I_3 . R_3 = 0{,}486 . 4 = \underline{\underline{1{,}944 \text{ V}}}$

Z příkladu je zřejmé, že výpočet pomocí Kirchhoffových rovnic je poměrně složitý. Zjednodušení dosáhneme, použijeme-li zjednodušené metody řešení, mezi které patří metoda smyčkových proudů a metoda uzlových napětí.

5.2.3 Metoda smyčkových proudů

Metoda smyčkových proudů vychází z metody Kirchhoffových rovnic. Spočívá v tom, že:

- v obvodu zvolíme $s = v - p$ nezávislých smyček proudu a
- počítáme podle II. Kirchhoffova zákonu.

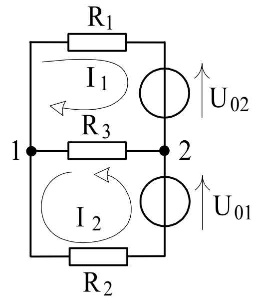
Proto jsou při této metodě používány zdroje napětí. Je-li v zapojení zdroj proudu, je vhodné jej přepočítat dříve uvedeným způsobem na ekvivalentní zdroj napětí.

Metodu si vysvětlíme na příkladu

Metoda spočívá v tom, že vytvoříme nezávislé smyčky, jejichž počet určíme ze vztahu (5.2.4). V nich zvolíme smyčkové proudy, které v každé smyčce označíme libovolně. Musíme sestavit tolik rovnic, kolik je smyček.

V příkladu na *obr. 5.2.6* jsou dva uzly a tři větve. Počet nezávislých rovnic pro II. KZ bude: $s = v - p = s - (u - 1) = 3 - 1 = 2$.

V uvedeném obvodu můžeme sestrojit dvě nezávislé smyčky. Zřejmě bychom mohli sestrojit ještě třetí smyčku, ale ta by nebyla nezávislá.



Obr. 5.2.6
Příklad obvodu se smyčkovými proudy

Postup sestavení rovnic:

První smyčka – napětí ve smyčce se musejí rovnat nule. Rovnici sestavíme tak, že jdeme ve směru šipky a sčítáme napětí od proudů na jednotlivých rezistorech:

Rovnice pro první smyčku:

$$I_1 \,.\, R_1 + R_3 \,.\, I_1 + R_3 \,.\, I_2 = -U_{02}$$

Po úpravě:

$$I_1 \,.\, (R_1 + R_3) + R_3 \,.\, I_2 = -U_{02}.$$

Rovnici pro druhou smyčku napíšeme přímo v konečné podobě:

$$I_1 \,.\, R_3 + I_2\,(R_2 + R_3) = -U_{01}.$$

Uvedené rovnice můžeme velmi snadno zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} U_{01} \\ -U_{02} \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \end{array} \,.\, \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Použití výpočetní techniky umožňuje efektivní řešení úloh pomocí maticového počtu.

Sestavení odporové matice pro metodu smyčkových proudů (viz matici nad tímto řádkem)

I. Odporová matice

a) Nakreslíme matici, která má tolik sloupců i řádků, kolik je nezávislých smyček;

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \cdots & R_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

b) **1. smyčka**, vyplňujeme buňky v prvním řádku matice

- **prvek matice R_{11}:** prvek, který zapisujeme do 1. sloupce 1. řádku, zapíšeme jako součet všech odporů ve smyčce 1;
- **prvek matice R_{12}:** zjistíme odpory společné pro smyčky 1 a 2, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_1 a I_2 jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky 1. řádku a 2. sloupce.

- **prvek matice R_{13}:** zjistíme odpory společné pro smyčky 1 a 3, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_1 a I_3 jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky 1. řádku a 3. sloupce.
- **prvek matice R_{1n}:** zjistíme odpory společné pro smyčky 1 a n, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_1 a I_n jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky 1. řádku a n. sloupce.

c) **2. smyčka**, vyplňujeme buňky ve druhém řádku matice:

- **prvek matice R_{22}:** prvek, který zapisujeme do 2. řádku 2. sloupce, zapíšeme součet všech odporů ve smyčce 2;
- **prvek matice R_{21}:** zjistíme odpory společné pro smyčky 1 a 2, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_1 a I_2 jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky 2. řádku a 1. sloupce.
- **prvek matice R_{23}:** zjistíme odpory společné pro smyčky 2 a 3, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_2 a I_3 jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky 2. řádku a 1. sloupce.
- **prvek matice R_{2n}:** zjistíme odpory společné pro smyčky 2 a *n*, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_2 a I_n jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky 2. řádku a n. sloupce.

d) **n-tá smyčka**, vyplňujeme buňky v n-tém řádku matice:

- **prvek matice R_{nn}:** prvek, který zapisujeme do n-tého řádku n-tého sloupce, zapíšeme součet všech odporů ve smyčce n;
- **prvek matice R_{n1}:** zjistíme odpory společné pro smyčky 1 a *n*, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_1 a I_n jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky *n*. řádku a 1. sloupce.
- **prvek matice R_{n2}:** zjistíme odpory společné pro smyčky n a 2, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_n a I_2 jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky n. řádku a *n* sloupce.
- **prvek matice R_{nm}:** zjistíme odpory společné pro smyčky n a m, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_n a I_m jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky *n* řádku a m-tého sloupce.
- **prvek matice $\mathrm{R}_{n;n-1}$:** zjistíme odpory společné pro smyčky n a n-1, v závislosti na tom, zda šipky proudů I_n a I_{n-1} jsou souhlasné či nikoliv, zapíšeme rezistory společné oběma smyčkám se znaménkem + nebo – do buňky *n* řádku a (n-1) sloupce.

II. Sloupcová matice zdrojů napětí

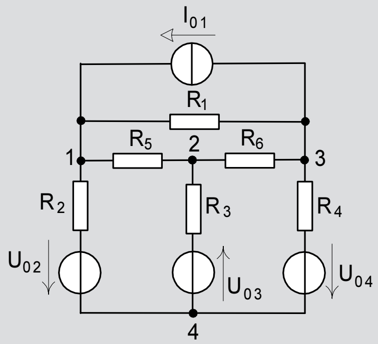
Sloupcová matice má stejný počet řádků jako odporová matice. Počet řádků odpovídá počtu nezávislých smyček proudů. Do jednotlivých políček sloupcové matice zapíšeme všechna napětí zdrojů U_{0x} působících v odpovídající smyčce. Jestliže má napěťová šipka směr opačný než šipka proudová, bude příslušné napětí se znaménkem +, v opačném případu bude mít znaménko –.

III. Sloupcová matice proudů

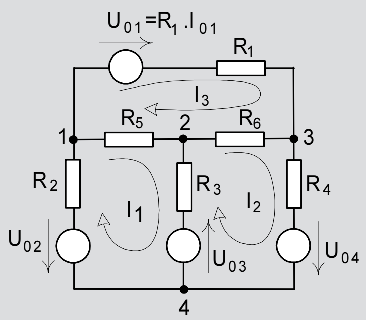
Sloupcová matice má takový počet řádků, kolik je nezávislých smyček proudů. Do jednotlivých políček zapisujeme označení proudů I_1 až I_n, kde n je počet nezávislých smyček.

Příklad na sestavení matice metodou smyčkových proudů

Výchozí obvod, který máme řešit, obsahuje zdroj proudu (*obr. 5.2.7*). Před zahájením výpočtu je výhodné tento zdroj proudu nahradit zdrojem napětí, jak je to znázorněno na *obr. 5.2.8*. Schéma obsahuje 4 uzly.



Obr. 5.2.7
Příklad k metodě smyčkových proudů



Obr. 5.2.8
Upravený obvod podle obr. 5.2.7

Počet nezávislých smyček: $s = v - p = v - (n - 1) = 6 - 4 + 1 = 3$,

kde v je počet všech větví – 6;

n je počet uzlů ve schématu.

Při výpočtu použijeme smyčky podle *obr. 5.2.8*.

Sestavení rovnic pro 3 smyčky:

Smyčka 1: $R_5 \,.\, (I_1 - I_3) + R_3 \,.\, (I_1 - I_2) + R_2 \,.\, I_1 - U_{03} - U_{02} = 0$

Smyčka 2: $R_6 \,.\, (I_2 - I_3) + R_4 \,.\, I_2 + R_3 \,.\, (I_2 - I_1) + U_{03} + U_{04} = 0$

Smyčka 3: $R_1 \,.\, I_3 + R_6 \,.\, (I_3 - I_2) + R_5 \,.\, (I_3 - I_1) + U_{01} = 0.$

Upravíme-li rovnice podle indexů proudů, dostaneme:

Smyčka 1: $(R_5 + R_3 + R_2) \,.\, I_1 - R_3 \,.\, I_2 - R_5 \,.\, I_3 = U_{02} + U_{03}$

Smyčka 2: $-R_3 \,.\, I_1 + (R_6 + R_4 + R_3) \,.\, I_2 - R_6 \,.\, I_3 = -U_{03} - U_{04}$

Smyčka 3: $-R_5 \,.\, I_1 - R_6 \,.\, I_2 + (R_1 + R_6 + R_5) \,.\, I_3 = -U_{01}$

Tyto rovnice můžeme přepsat do maticového tvaru:

$$\begin{bmatrix} U_{02} + U_{03} \\ -U_{03} - U_{04} \\ -U_{O1} \end{bmatrix} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & R_5 + R_3 + R_2 & -R_3 & -R_5 \\ 2 & -R_3 & R_6 + R_4 + R_3 & -R_6 \\ 3 & -R_5 & -R_6 & R_1 + R_6 + R_5 \end{array} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Matici jsme mohli vyplnit také podle výše uvedeného popisu:

do buňky 11 jsme zapsali součet všech odporů ve smyčce 1;
do buňky 12 jsme zapsali odpor společný pro smyčky 1 a 2, proudy mají opačný směr, proto se záporným znaménkem;
do buňky 13 jsme zapsali odpor společný pro smyčky 1 a 3, proudy mají opačný směr, proto se záporným znaménkem;
do buňky 22 jsme zapsali součet všech odporů ve smyčce 2;
do buňky 21 jsme zapsali odpor společný pro smyčky 2 a 1, proudy mají opačný směr, proto se záporným znaménkem;
atd.

5.2.3.1 Výpočet smyčkových proudů pomocí odporových matic

Často používanou metodou pro řešení systému rovnic je tzv. Cramerovo pravidlo. Zůstaneme-li u příkladu k *obr. 5.2.8*, vypočítáme:

- smyčkový proud I_1 pomocí vztahu

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \tag{5.2.5a}$$

- smyčkový proud I_2 pomocí vztahu

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \tag{5.2.5b}$$

- smyčkový proud I_3 pomocí vztahu

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{5.2.5c}$$

Pro obvod o n smyčkách vypočítáme smyčkový proud I_k (k = 1, 2, 3, …):

$$I_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \tag{5.2.5}$$

kde Δ je determinant odporové matice;
Δ_k je determinant matice, která vznikne z odporové matice záměnou k-tého sloupce matice sloupcovou maticí zdrojů napětí.