

# Vážení zákazníci,

dovolujeme si Vás upozornit, že na tuto ukázkou knihy se vztahují autorská práva, tzv. copyright.

To znamená, že ukáзка má sloužit výhradně pro osobní potřebu potenciálního kupujícího (aby čtenář viděl, jakým způsobem je titul zpracován a mohl se také podle tohoto, jako jednoho z parametrů, rozhodnout, zda titul koupí či ne).

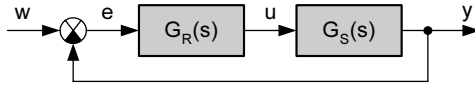
Z toho vyplývá, že není dovoleno tuto ukázkou jakýmkoliv způsobem dále šířit, veřejně či neveřejně např. umístováním na datová média, na jiné internetové stránky (ani prostřednictvím odkazů) apod.

*redakce nakladatelství BEN – technická literatura*  
[redakce@ben.cz](mailto:redakce@ben.cz)



### Příklad 2.41

Pokud známe matematický model regulované soustavy můžeme seřízení regulátoru vypočítat teoreticky. Metodou kritického zesílení navrhne optimální seřízení ideálního PI regulátoru, který je zapojen v regulačním obvodu podle obr. 2.116.



Obr. 2.116 K příkladu 2.41

Regulovaná soustava je dána přenosem

$$G_S(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6},$$

regulátor

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}.$$

**Řešení:** Regulátoru ponecháme pouze proporcionální složku, zbývající (v našem případě integrační) vyřadíme, tj.  $r_{-1} = 0$ . Pro regulátor použijeme přenos  $G_R(s) = r_0$ .

Charakteristickou rovnici regulačního obvodu získáme z jmenovatele přenosu odchylky při řízení

$$\begin{aligned} G_{ew}(s) &= \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)} = \frac{1}{1 + \frac{6r_0}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}} = \\ &= \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1 + r_0)} \end{aligned}$$

a tedy

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1 + r_0) = 0.$$

Pro určení kritického zesílení regulátoru  $r_{0k}$  použijeme Hurwitzova kritéria

$$H_3 = \begin{vmatrix} 6 & 6(1+r_0) & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6(1+r_0) \end{vmatrix}.$$

$$H_2 = 6 \cdot 11 - 6(1 + r_0) = 6(10 - r_0).$$

Pro hranici stability musí být splněna podmínka

$$H_2 \stackrel{!}{=} 0, \quad \text{tj. } r_0 = r_{0k} = 10.$$

Pro  $r_{0k}$  obvod kmitá s periodou

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}.$$

Pro její výpočet potřebujeme určit úhlový kmitočet  $\omega_k$ . Je zřejmé, že pro periodický děj na hranici stability existuje nutně dvojice ryze imaginárních sdružených kořenů  $s_{1,2} = \pm j\omega_k$  charakteristické rovnice.

Kritický úhlový kmitočet  $\omega_k$  určíme dosazením  $r_0 = r_{0k}$  a  $s = j\omega_k$  (jednoho ryze imaginárního kořene) do charakteristické rovnice

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1+r_0) = \left| \begin{array}{l} r_0 = r_{0k} \\ s = j\omega_k \end{array} \right| = (j\omega_k)^3 + 6(j\omega_k)^2 + 66 = 0,$$

a dále z podmínky, že reálná část rovnice je rovna nule,  $ReN(\omega_k) = 0$  určíme  $\omega_k$

$$(66 - 6\omega_k^2) + j\omega_k(11 - \omega_k^2) = 0,$$

$$66 - 6\omega_k^2 = 0; \quad \omega_{k1,2} = \pm\sqrt{11}.$$

Fyzikální význam má řešení  $\omega_k = \sqrt{11} = 3,317\text{s}^{-1}$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi}{\sqrt{11}} = 1,894\text{s}.$$

Stavitelné parametry PI regulátoru tedy budou:

$$k_R = 0,45 \quad k_{RK} = 0,45 \cdot 10 = 4,5;$$

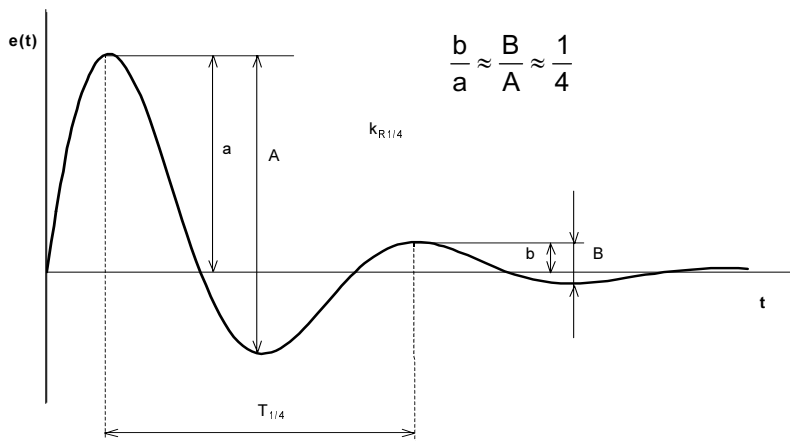
$$T_I = \frac{T_k}{1,2} = \frac{1,894}{1,2} = 1,578\text{ s};$$

$$r_0 = k_R$$

$$r_{-1} = \frac{0,54r_{0k}}{T_k} = \frac{0,54 \cdot 10\sqrt{11}}{2\pi} = 2,85\text{ s}^{-1}.$$

**POZNÁMKA:** Výše popsaná Ziegler-Nicholsova metoda kritických parametrů pro uzavřené smyčky, na mezi stability má svoji modifikaci, **metodu čtvrtinového tlumení**.

Základní myšlenkou je přivést regulační obvod, v kterém opět působí regulátor pouze s proporcionalní složkou ( $r_{-1} = 0$ ,  $r_1 = 0$ ), změnou zesílení  $k_R$  na hodnotu  $k_{R1/4}$ , při které regulační pochod má průběh znázorněný na obr. 2.117.



Obr. 2.117 Měření  $T_{1/4}$  při  $k_{R1/4}$

Při zesílení  $k_{R1/4}$  lze odečíst dobu kmitu při tlumeném kmitání  $T_{1/4}$ . Doporučené hodnoty pro zesílení regulátoru jsou v tab. 2.28.

Tab. 2.28 Seřízení regulátoru z čtvrtinového tlumení

	$G_R = k_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$		
	$k_R^* \equiv k_p^*$	$T_I^*$	$T_D^*$
P	$k_{p1/4}$	—	—
PI	$0,9 k_{p1/4}$	$T_{1/4}$	—
PID	$1,2 k_{p1/4}$	$T_{1/4}$	$0,25 T_{1/4}$

### 2.2.3.3 Seřízení regulátoru na základě znalosti přechodové charakteristiky regulované soustavy

Je možné přímo volit jednoduché relace mezi přechodovou charakteristikou regulované soustavy a stavitelnými parametry regulátoru takové, aby regulační pochod byl blízký optimálnímu. Jde o metodu otevřené smyčky. Z odměřené přechodové charakteristiky (obr. 2.118) regulované soustavy zjistíme dobu průtahu  $T_u$ , dobu náběhu  $T_n$  a činitel autoregulace  $a_0 = 1/k_s$ . Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru jsou uvedeny v tab. 2.29.

Při splnění podmínky  $0 < T_u < T_n$  lze průběh přechodné charakteristiky aproximovat přenosem

$$G_S(s) \approx \frac{k_s}{T_n s + 1} e^{-T_u s},$$

kde  $k_s$  je koeficient přenosu (zesílení) regulované hodnoty  $S_1$

$T_u$  – doba průtahu,

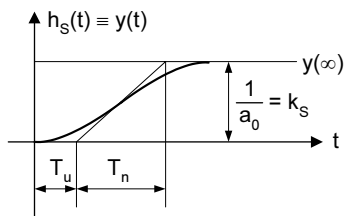
$T_n$  – doba náběhu,

$\alpha$  – regulovatelnost.

Výhodou je, že regulační obvod nemusí být při seřizování na mezi stability.

$$0 < T_u < T_n$$

$$\alpha = \frac{T_u}{T_n}$$



Obr. 2.118 Přechodové charakteristiky regulované soustavy

#### Příklad 2.40

Byla změřena přechodová charakteristika výměníku (obr. 2.119). Naměřené hodnoty jsou:

$$T_u = 1,5 \text{ min}$$

$$T_n = 4,5 \text{ min}$$

$$k_s = \frac{1}{a_0} = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{40}{10} = 4 \text{ } ^\circ\text{C/mm.}$$

Seřídíme PI regulátor.

**Řešení:** Podle tab. 2.29 nastavíme statické parametry PI regulátoru: Zesílení bude

$$k_R^* = 0,9 \frac{T_n}{T_u} s \frac{1}{k_S} = 0,9 \cdot \frac{4,5}{1,5} \cdot \frac{1}{4} = 0,675 \text{ mm/}^\circ\text{C},$$

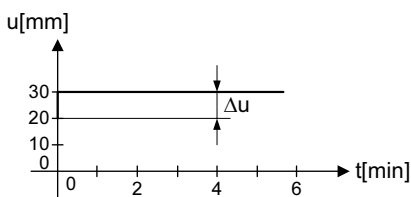
což značí, že zesílení regulátoru musí zabezpečit, aby při odchylce  $e = 1^\circ\text{C}$  na vstupu regulátoru se přestavil regulační orgán o 0,675 mm. Integrační časová konstanta bude

$$T_I = 3,5 \cdot T_u = 3,5 \cdot 1,5 = 5,25 \text{ min.}$$

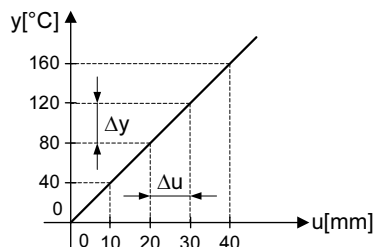
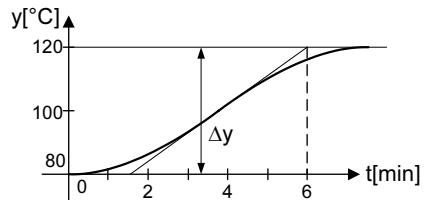
Výpočet zesílení regulátoru lze provést i v bezrozměrových hodnotách. Potom je nutné definovat maximální zdvih regulačního orgánu, např.  $u_{max} = 40 \text{ mm}$  a za předpokladu lineární regulované soustavy můžeme nakreslit její statickou charakteristiku (obr. 2.120).

Tab. 2.29 Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru

Typ	$k_R^* \equiv r_0^*$	$T_I^*$	$T_D^*$
P	$\frac{T_n}{T_u} \frac{1}{k_S}$	–	–
PI	$0,9 \frac{T_n}{T_u} \frac{1}{k_S}$	$3,5 T_u$	–
PD	$1,2 \frac{T_n}{T_u} \frac{1}{k_S}$	–	$0,25 T_u$
PID	$1,25 \frac{T_n}{T_u} \frac{1}{k_S}$	$2 T_u$	$0,5 T_u$



Obr. 2.119 Přechodová charakteristika výměníku



Obr. 2.120 Statická charakteristika výměníku

Potom podle  $\Delta y \cdot a_0 = \Delta u$  platí

$$y_{\max} = \frac{1}{a_0 u_{\max}} = 4 \cdot 40 = 160 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Vypočítáme hodnotu  $(\Delta y)_r$ , tj. k jaké změně teploty při nastaveném zesílení  $k_R^* = 0,675 \text{ mm}/^\circ\text{C}$  musí dojít, aby se regulační orgán přestavil o maximální zdvih (o 100 %).

1	$^\circ\text{C}$	$(\Delta y)_r$	$[^\circ\text{C}]$
0,675	mm	40	[mm]
$(\Delta y)_r =$	$\frac{40}{0,675} =$	59,26 $^\circ\text{C}$ .	

Pásmo proporcionality bude

$$pp = \frac{59,26}{160} \cdot 100 = 37 \%$$

a zesílení

$$k_R = \frac{1}{37} \cdot 100 = 2,7 [-].$$

### 2.2.3.4 Seřízení regulátoru podle funkcí standardního tvaru

#### ***Whiteleyovy standardní tvary***

Metoda vychází z určitých *vzorových typů* přenosových funkcí uzavřeného regulačního obvodu, o kterých víme, že dávají vyhovující regulační pochod, a podle nich upravuje seřízením parametrů regulátorů hodnoty koeficientů přenosové funkce v konkrétním případě tak, aby se koeficienty této konkrétní funkce a funkce vzorové navzájem rovnaly. Takové vzorové přenosové funkce zveřejnil *Whiteley* a nazval je *standardními tvary přenosové funkce*, která je poměrem obrazů výstupní veličiny a vstupní skokové funkce (žádané veličiny nebo poruchy). Standardní tvary zaručují, že při dodržení předepsaných koeficientů charakteristické rovnice pro daný typ přenosu regulačního obvodu se nepřekročí daná hodnota maximálního přeregulování  $\Delta y_{\max}$  (překmitu), případně i dobu ustálení  $t$ , nebo jiné charakteristické veličiny regulačního pochodu.

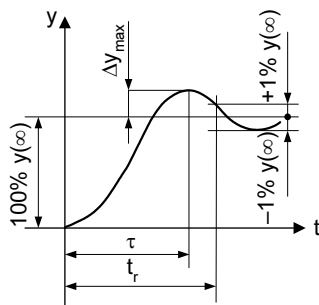
Takže pro konkrétní přenosovou funkci  $G_w(s)$  (2.398), tj. přenos řízení, kdy  $w(t) = \eta(t)$  a  $v(t) = 0$ , ve tvaru

$$G_w(s) = \frac{b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.398)$$

najdeme předepsané koeficienty  $\bar{a}_i$  standardního tvaru (2.399) pro daný stupeň

$$G(q) = \frac{\bar{b}_0}{a_n q^n + \dots + a_1 q + a_0}. \quad (2.399)$$

Jsou v ní současně udány i hodnota  $\Delta y_{max}$ , okamžik  $\tau$  maximálního pře-regulování (překmitu) a doba ustálení  $t_r$  (viz obr. 2.121).



Obr. 2.121 Regulační pochod odpovídající standardnímu tvaru

Konkrétní přenos ve tvaru (2.398), má  $a_n \neq 1$  i  $a_0 \neq 1$ . Musíme proto přenos (2.398) přetransformovat, aby  $a_n = 1$  i  $a_0 = 1$  postupujeme tak, že nejdříve podělíme čitatele i jmenovatele koeficientem  $a_0$

$$G_w(s) = \frac{b_0/a_0}{\frac{a_n}{a_0} s^n + \dots + \frac{a_2}{a_0} s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + 1} \quad (2.400)$$

a potom použijeme substituce

$$s = \left( \frac{a_0}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}} q, \quad (2.401)$$

takže dostaneme přenos (2.398) ve tvaru:



$$G_w(q) = \frac{b_o / a_o}{\frac{a_n \left(\frac{a_n}{a_o}\right)^n q^n + \dots + a_2 \left(\frac{a_o}{a_n}\right)^2 q^2 + a_1 \left(\frac{a_o}{a_n}\right)^1 q + 1} = \frac{\beta_0}{\alpha_n q^n + \dots + \alpha_1 q + \alpha_0} \quad (2.402)$$

Těmito úpravami jsme získali *přetřansformovaný tvar (2.402) původního přenosu (2.398)*.

Koeficientům  $\alpha_i$  přenosu (2.402) přiřadíme tabelované hodnoty  $\bar{a}_i$  příslušného standardního tvaru přenosu z *tab. 2.26* pro daný stupeň, tj.  $\bar{a}_i = \alpha_i$ . Tím získáme vztahy, z kterých vypočítáme vyšetřované hodnoty stavitelných parametrů regulátoru, které jsou zahrnuty v koeficientech  $\alpha_i$ . Hodnota  $\Delta y_{max}$  je udána v %  $y(\infty)$ .

Tabelované časy  $\tau_r^{tab}$ ,  $t_r^{tab}$  se přepočítají na skutečné podle vztahu

$$t_r = t_r^{tab} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_o}}; \quad \tau = \tau^{tab} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_o}} \quad (2.403)$$

Obdobně byly vypracovány tabulky koeficientů standardního tvaru přenosové funkce typu

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (2.404)$$

(jsou uvedeny v *tab. 2.31*) a pro tvar přenosové funkce typu

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (2.405)$$

(jsou uvedeny v *tab. 2.32*).

### **Příklad 2.41**

Použitím Whiteleyových funkcí standardního tvaru navrhněme strukturu regulátoru a seřízení regulátoru pro regulovanou soustavu s přenosem

$$G_s = \frac{2}{s(s+10)^2}.$$

Regulační obvod je nakreslen na *obr. 2.122*.

Tab. 2.30 Standardní tvary přenosové funkce typu (2.398)

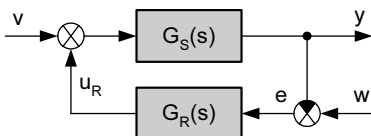
Stupeň n	koeficienty							charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_0$	$\tau^{\text{tab}}$ [s]	$t_r^{\text{tab}}$ [s]	$\Delta y_{\text{max}}$ [%]
2					1	1,4	1	2,65	7,0	5,0
3				1	2,0	2,0	1	3,35	9,5	8,7
4			1	2,6	3,4	2,6	1	4,25	15,0	11,7
5		1	3,2	5,2	5,2	3,2	1	4,95	> 18,0	13,0
6	1	3,7	7,5	9,1	7,5	3,7	1	5,55		13,3

Tab. 2.31 Standardní tvary přenosové funkce typu (2.404)

Stupeň n	koeficienty							charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_0$	$\tau^{\text{tab}}$ [s]	$t_r^{\text{tab}}$ [s]	$\Delta y_{\text{max}}$ [%]
2					1	2,5	1	2,0		10,0
3				1	5,1	6,3	1	4,1		10,0
4			1	7,2	16,0	12,0	1	5,5		10,0
5		1	9,0	29,0	38,0	18,0	1	6,8		10,0
6	1	11,0	43,0	83,0	73,0	25,0	1	8,0		10,0

Tab. 2.32 Standardní tvary přenosové funkce typu (2.405)

Stupeň n	koeficienty							charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_0$	$\tau^{\text{tab}}$ [s]	$t_r^{\text{tab}}$ [s]	$\Delta y_{\text{max}}$ [%]
3				1	6,7	6,7	1	3,5		10,0
4			1	7,9	15,0	7,9	1	5,4		15,0
5		1	18,0	69,0	69,0	18,0	1	6,5		20,0
6	1	36,0	251,0	485,0	251,0	36,0	1	8,0		20,0



Obr. 2.122 K příkladu 2.41

**Řešení:** Odhadem chceme použít ideální PD regulátor s přenosem

$$G_R(s) = r_0 + r_1 s.$$

Přenos řízení bude

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{2(r_0 + r_1 s)}{1 + \frac{2(r_0 + r_1 s)}{s(s+10)^2}} = \frac{2(r_0 + r_1 p)}{s^3 + 20s^2 + 100s + 2r_1 s + 2r_0}.$$

Standardní tvar přenosu řízení získáme

- dělením všech koeficientů přenosu hodnotou  $a_0 = 2r_0$ ,
- zavedením a použitím substituce

$$s = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} q = \left(\frac{2r_0}{1}\right)^{\frac{1}{3}} q.$$

$$G_w(s) = \frac{\frac{2r_1}{2r_0} s + 1}{\frac{1}{2r_0} s^3 + \frac{20}{2r_0} s^2 + \left(\frac{100}{2r_0} + \frac{2r_1}{2r_0}\right) s + 1}$$

$$G_w(q) = \frac{\frac{r_1}{r_0} \sqrt[3]{2r_0} q + 1}{\frac{1}{2r_0} (2r_0)^{\frac{3}{3}} q^3 + \frac{20}{2r_0} (2r_0)^{\frac{2}{3}} q^2 + \frac{100 + 2r_1}{2r_0} (2r_0)^{\frac{1}{3}} q + 1}.$$

Vzniklé koeficienty  $\alpha_i$  charakteristické rovnice porovnáme s koeficienty standardního tvaru v *tab. 2.30* pro třetí stupeň charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 = \alpha_3 &\Rightarrow 1 = 1, \\ \bar{a}_2 = \alpha_2 &\Rightarrow 5,1 = \frac{10}{r_0} \sqrt[3]{2r_0}, \\ \bar{a}_1 = \alpha_1 &\Rightarrow 6,3 = \frac{100 + 2r_1}{2r_0} 2r_0 \sqrt[3]{2r_0}, \\ \bar{a}_0 = \alpha_0 &\Rightarrow 1 = 1. \end{aligned}$$

Z podmínky  $\bar{a}_2 = \alpha_2$  vypočítáme  $r_0 = 30,1$ .

Z podmínky  $\bar{a}_1 = \alpha_1$  vypočítáme  $r_1 = -1,615$ .

Fyzikální význam nastavení záporné hodnoty  $r_1$  nemá smysl. Je zřejmé, že jsme zvolili nesprávnou strukturu regulátoru. Proto v regulačním obvodu na *obr. 2.122* použijeme PI regulátoru s přenosem

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}.$$

Přenos řízení s PI regulátorem bude

$$G_w(s) = \frac{\frac{2}{s(s+10)^2} \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}}{1 + \frac{2(r_0 p + r_{-1})}{s^2(s+10)^2}} = \frac{2(r_0 s + r_{-1})}{s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 2r_0 s + 2r_{-1}}.$$

Dalšími úpravami, tj. dělením koeficientem  $a_0 = 2r_{-1}$  a zavedením substituce

$$s = \left( \frac{a_0}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}} q = (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} q$$

získáme přenos řízení ve tvaru

$$G_w(q) = \frac{\frac{2r_0}{2r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1}{\frac{1}{2r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{4}{4}} q^4 + \frac{20}{2r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{3}{4}} q^3 + \frac{100}{2r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{2}{4}} q^2 + \frac{2r_0}{2r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1}.$$

Koeficienty polynomu jmenovatele porovnáme s koeficienty standardního tvaru v *tab. 2.30* pro čtvrtý stupeň charakteristického polynomu

$$\bar{a}_4 = \alpha_4 \Rightarrow 1 = 1,$$

$$\bar{a}_3 = \alpha_3 \Rightarrow 7,2 = \frac{20}{2r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{3}{4}},$$

$$\bar{a}_2 = \alpha_2 \Rightarrow 16 = \frac{100}{2r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{2}{4}},$$

$$\bar{a}_1 = \alpha_1 \Rightarrow 12 = \frac{2r_0}{2r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{1}{4}},$$

$$\bar{a}_0 = \alpha_0 \Rightarrow 1 = 1.$$

Hodnotu  $r_{-1}$  můžeme vypočítat ze dvou podmínek:

$$\text{pro } \bar{a}_2 = \alpha_2 : 16 = 50 \frac{1}{r_{-1}} \sqrt{2r_{-1}}$$

$$\text{pro } \bar{a}_3 = \alpha_3 : 7,2 = \frac{10}{r_{-1}} \sqrt[4]{(2-r_{-1})^3}$$

$$r_{-1} = 19,53$$

$$r_{-1} = 29,768$$

z podmínky  $\bar{a}_1 = \alpha_1$  určíme  $r_0$ :

z podmínky  $\bar{a}_1 = \alpha_1$  určíme  $r_0$ :

$$12 = \frac{2r_0}{r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{1}{4}}$$

$$12 = \frac{2r_0}{r_{-1}} (2r_{-1})^{\frac{1}{4}}$$

pro  $r_{-1} = 19,53$  bude  $r_0 = 93,745$

pro  $r_{-1} = 29,768$  bude  $r_0 = 128,6$ .

Vidíme, že jsme dostali dvě různá řešení. Zkontrolujeme pro obě dvojice nastavitelných parametrů regulátoru stabilitu regulačního obvodu.

Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu:

$$s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 2r_0s + 2r_{-1} = 0.$$

Hurwitzův subdeterminant  $H_{n-1} \equiv H_3$  pro obě řešení bude:

$$H_3 = \begin{vmatrix} 20 & 2 \cdot 93,745 & 0 \\ 1 & 100 & 2 \cdot 19,53 \\ 0 & 20 & 2 \cdot 93,745 \end{vmatrix}; H_3 = \begin{vmatrix} 20 & 2 \cdot 128,6 & 0 \\ 1 & 100 & 2 \cdot 29,768 \\ 0 & 20 & 2 \cdot 128,6 \end{vmatrix}.$$

V obou případech  $H_3 > 0$  i  $H_2 > 0$  a tedy regulační obvod pro obě dvě seřízení je stabilní.

Z příkladu je zřejmé, že metodě chybí určení použitelnosti pro jednotlivé typy regulátorů (v našem případě nutnost změny původně použitého PD regulátoru na PI regulátor) a dále, že při vyšším stupni charakteristického polynomu a tím i nadpočetném počtu podmínek dostaneme více řešení (v našem případě výběr mezi nimi nerozhodla ani kontrola stability).

### **Naslimova metoda**

Naslim dokázal, že když pro koeficienty charakteristické rov. (2.406) uzavřeného regulačního obvodu

$$a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0, \quad (2.406)$$

platí nerovnosti

$$a_i^2 \geq \alpha \cdot a_{i-1} \cdot a_{i+1} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, (n-1), \quad (2.407)$$

potom maximální přeregulování  $\Delta y_{max}$  [%] (překmit) závisí na hodnotě  $\alpha$  podle tab. 2.33.

Tab. 2.33 Závislost  $\Delta y_{max}$  na  $\alpha$  dle Naslima

$\alpha$	1,75	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4
$\Delta y_{max}$ [%]	16	12	8	5	3	1

### Příklad 2.42

Máme regulovanou soustavu s přenosem

$$G_s(s) = \frac{1}{(s+1)^3}.$$

Přiřadíme k ní PI regulátor. Určíme hodnoty nastavitelných parametrů regulátoru tak, aby při jednotkovém skoku řízení maximální přeregulování (překmit) nepřesáhlo hodnotu 5 %.

**Řešení:** Přenos řízení bude

$$G_w(s) = \frac{\frac{1}{(s+1)^3} \left( r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \right)}{1 + \frac{1}{(s+1)^3} \left( r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \right)} = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + (1+r_0)s + r_{-1}}.$$

Charakteristická rovnice je

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + (1+r_0)s + r_{-1} = 0.$$

Pro splnění požadavku, aby bylo maximální přeregulování  $\Delta y_{max} \leq 5\%$  určíme z tab. 2.32 koeficient  $\alpha = 2,0$ .

Nyní můžeme z nerovností (2.407) získat podmínky pro výpočet  $r_0$  a  $r_{-1}$ :

$$\text{pro } i = 1 \Rightarrow (1+r_0)^2 \geq 2 \cdot 3 \cdot r_{-1},$$

$$\text{pro } i = 2 \Rightarrow 3^2 \geq 2 \cdot 3 (1+r_0),$$

$$\text{pro } i = 3 \Rightarrow 3^2 \geq 2 \cdot 1 \cdot 3.$$

Nastavitelné parametry jsou v podmínkách pro  $i = 1$  a  $2$ . Pro výpočet použijme mezní případ (rovnost)

$$9 = 6(1+r_0) \Rightarrow r_0 = 0,5,$$

$$(1 + r_0)^2 = 6r_{-1} \Rightarrow r_{-1} = 0,375.$$

Podmínka pro  $i = 3$  je vždy splněna.

### 2.2.3.5 Kritérium jakosti regulace podle funkcionálu odchylky (integrální kritéria)

Uvažujeme regulační pochod způsobený změnou žádané hodnoty regulované veličiny, tj.  $w(t) = \eta(t)$ ,  $v(t) = 0$ , či určitou poruchou, tj.  $v(t) = \eta(t)$ ,  $w(t) = 0$ , (obr. 2.123) a stanovme časový integrál  $J$  rov. (2.409 až 2.411) regulačních odchylek (2.408) regulované veličiny od její nové ustálené hodnoty

$$e(t) = y(t) - y(\infty), \quad (2.408)$$

podle vztahů:

- pro lineární regulační plochu

$$J_1 = \int_0^{\infty} [y(t) - y(\infty)] dt, \quad (2.409)$$

která se hodí pro nekmitavý regulační pochod (obr. 2.123 – průběh  $y_2(t)$ ).

Pro kmitavý regulační pochod (obr. 2.140 –  $y_1(t)$ ) je třeba použít při výpočtu lineární regulační plochy absolutní hodnoty  $|e(t)|$ , tj.

$$J_1 = \int_0^{\infty} |y(t) - y(\infty)| dt \quad \text{resp.} \quad J_{ITAE} = \int_0^{\infty} t |y(t) - y(\infty)| dt. \quad (2.410)$$

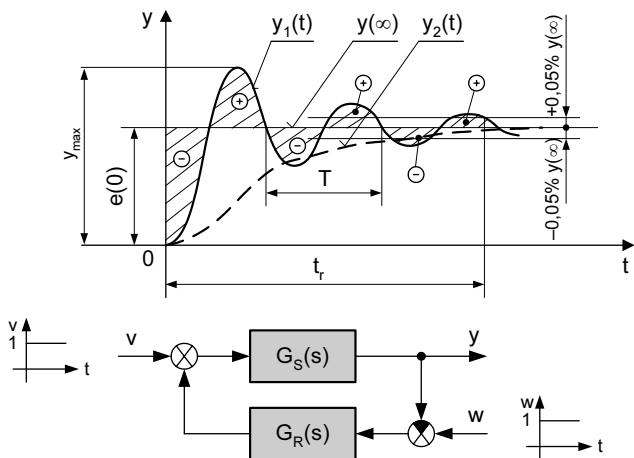
- pro kvadratickou regulační plochu

$$J_2 = \int_0^{\infty} [y(t) - y(\infty)]^2 dt, \quad (2.411)$$

která je vhodná pro kmitavé regulační pochody.

**POZNÁMKA:** Pro regulační pochody bez trvalé regulační odchylky bude ve vztazích (2.409, 2.410, 2.411)  $e(\infty) = 0$ . Z obr. 2.123 vyplývá, že zvoleným způsobem označení má odchylka  $e(t)$  záporné znaménko. Integrál  $J$ , (viz rov. 2.409) považujeme za kladný.

Cílem úspěšnosti seřizování regulátorů resp. volby struktury regulátoru nebo případně i struktury regulačního obvodu je, aby výše uvedené časové integrály – regulační plochy byly minimální ( $J_i \rightarrow \min$ ).



Obr. 2.123 Regulační pochody kmitavé –  $y_1(t)$  a aperiodické –  $y_2(t)$  vyvolané změnou  $w(t)$  nebo vznikem  $v(t)$

Tento požadavek lze objasnit skutečností, že při regulačním pochodu dochází k výměně energie. Při záporné regulační odchylce má regulovaná soustava nedostatek energie (plochy označené záporným znaménkem), při přeregulování – kladné regulační odchylce (plochy označené kladným znaménkem) má regulovaná soustava přebytek energie a je třeba omezit příkon, aby spotřeba energie regulovanou soustavou byla větší a regulovaná veličina se přiblížila opět k hodnotě  $y(\infty)$ .

Ideální průběh přechodového děje by byla skoková změna z hodnoty  $y(0)$  na hodnotu  $y(\infty)$ , v tom případě bude  $J_i = 0$ . Ve skutečnosti přechodový děj má tvar  $y_1(t)$  resp.  $y_2(t)$  (viz obr. 2.123) a aby výměna energie byla co nejmenší musí být regulační plocha minimální. Použijeme-li pro regulaci PID regulátoru, budou  $J_i$  vypočítané podle rov. (2.409, 2.410 nebo 2.411) funkcí všech nastavitelných parametrů regulátoru

$$J_i = J_i(r_0, r_{-1}, r_1). \quad (2.412)$$

Nutnou podmínkou pro  $J_i \rightarrow \min$  je, aby parciální deviace  $J_i$  podle všech nastavitelných parametrů regulátoru byly rovny nule,

$$\frac{\partial J_i}{\partial r_0} = 0, \quad \frac{\partial J_i}{\partial r_{-1}} = 0, \quad \frac{\partial J_i}{\partial r_1} = 0. \quad (2.413)$$

Z těchto rovnic spočítáme hledané hodnoty stavitelných parametrů regulátoru pro jeho optimální seřízení.



Pro výpočet časových integrálů  $J_i$  využijeme Laplaceova obrazu regulační odchylky rov. (2.414)

$$L\{y(t) - y(\infty)\} = E(s) = Y(s) - \frac{y(\infty)}{s}, \quad (2.414)$$

kterou si vyjádříme pomocí přenosu řízení  $G_w(s)$  při změně žádané veličiny jako vstupního signálu nebo pomocí přenosu poruchy  $G_v(s)$  při poruše.

Z přenosu řízení při jednotkovém skoku žádané veličiny bude Laplaceův obraz výstupní veličiny

$$Y(s) = G_w(s)W(s) = G_w(s)\frac{1}{s}. \quad (2.415)$$

Pro výpočet  $y(\infty)$ , tj. ustálené hodnoty regulované veličiny, použijeme větu o koncové hodnotě (2.30) a rov. (2.416)

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_w(s)\frac{1}{s} = G_w(0). \quad (2.416)$$

Dosažením do (2.414) dostaneme Laplaceův obraz regulační odchylky

$$E(s) = L\{y(t) - y(\infty)\} = \frac{1}{s}[G_w(s) - G_w(0)]. \quad (2.417)$$

Z přenosu poruchy při jednotkovém skoku poruchy můžeme obdobně odvodit vztah pro  $E(s)$

$$E(s) = L\{y(t) - y(\infty)\} = \frac{1}{s}[G_v(s) - G_v(0)]. \quad (2.418)$$

Volba způsobu výpočtu  $E(s)$  závisí na tom, jaký požadavek na řízení upřednostňujeme:

- pokud optimální vyrovnávání změny žádané veličiny  $w(t)$  volíme vztah (2.417),
- pokud optimální vyrovnávání vlivu poruchové veličiny  $v(t)$  volíme vztah (2.418).

### **Seřízení regulátoru podle minima lineární regulační plochy**

Metoda seřízení regulátoru se hodí pro případy, kdy je z technologických nebo provozních důvodů třeba zajistit regulační pochody aperiodické (bez kmitavých složek – obr. 2.123,  $y_2(t)$ ), např. při regulaci v pecích, při řízení rozjezdu nebo brždění vlaku apod. Hodnotu integrálu rov. (2.409), určíme výhodně pomocí Laplaceova obrazu regulační odchylky rov. (2.414, 2.417, 2.418) podle vztahu

$$J = \int_0^{\infty} [y(t) - y(\infty)] dt = \lim_{s \rightarrow 0} s L \left\{ \int_0^{\infty} [y(t) - y(\infty)] dt \right\} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} L \{y(t) - y(\infty)\} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) \quad (2.419)$$

a dále využitím vztahů (2.417 a 2.418).

$$J_1 = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G_w(s) - G_w(0)], \quad (2.420)$$

$$J_1 = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G_v(s) - G_v(0)]. \quad (2.421)$$

Jde o minimalizaci funkcionálu  $J_1 \rightarrow \min$  při současném splnění požadavku reálných záporných kořenů charakteristické rovnice regulačního obvodu. Metoda vede na přetlumené regulační pochody s poměrně dlouhou dobou regulace  $t_r$ .

Vyjádříme si funkcionál  $J_1$  pomocí racionální funkce lomené a určíme její limitu

$$J_1 = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n (s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0)} = \frac{a_0}{a_n A_0}. \quad (2.422)$$

Jen v některých koeficientech  $A_0$  až  $A_{n-1}$  jsou obsaženy nastavitelné parametry regulátorů, nazýváme je ovlivnitelné na rozdíl od zbývajících tzv. neovlivnitelných. Koeficient  $A_0$  obsahuje vždy některý z nastavitelných parametrů regulátoru, koeficienty  $b_0$  a  $a_n$  jsou konstanty. Proto minima funkcionálu  $J_1$  rov. (2.409) bude dosaženo při maximální hodnotě  $A_0$ , což však samo o sobě nezaručuje, že regulační pochod bude optimální. Při splnění podmínky maximální hodnoty  $A_0$  není vyloučen výskyt kmitavého regulačního pochodu, např. na hranici stability případně i mírně tlumeného. Naše úvaha vede tedy na omezení se *pouze na aperiodické regulační pochody*, u kterých příslušný polynom charakteristické rovnice (viz závorka rov. 2.422) *má kořeny  $s$ , vesměs reálné záporné*.

Řešení minima lineární regulační pochody rov. (2.422) se redukuje na řešení maxima koeficientu  $A_0$ .

**POZNÁMKA:** V dalším je uvedena ukázka jedné z cest, jak minimalizovat  $J_1$ .

Jde o řešení vázaného maxima funkce

$$A_0 = g_0 = f(s_1, s_2, \dots, s_n) = (-1)^n s_1 \cdot s_2 \dots s_n \quad (2.423)$$

s některými z podmínek

$$g_1 = A_1; \quad g_2 = A_2; \quad \dots; \quad g_{n-1} = A_{n-1},$$

jejichž počet je roven počtu neovlivnitelných koeficientů  $A_i$  charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu. Přitom zavedené veličiny  $g_i$  jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} g_0 &= (-1)^n s_1 s_2 \dots s_n, \\ g_1 &= (-1)^{n-1} (s_2 s_3 \dots s_n + \dots + s_1 s_2 \dots s_{n-1}), \\ g_2 &= (-1)^{n-2} (s_3 s_4 \dots s_n + \dots + s_1 s_2 \dots s_{n-2}), \\ &\vdots \\ g_{n-1} &= (-1)^{n-(n-1)} (s_1 + s_2 + \dots + s_n) = -s_1 - s_2 - \dots - s_n. \end{aligned} \quad (2.424)$$

Uvedená konstrukce vyplývá z *Vietových formulí*, které stanovují vztahy mezi kořeny a koeficienty polynomu  $n$ -tého stupně.

Tedy jsou-li  $s_1, s_2, \dots, s_n$  kořeny polynomu

$$N(s) = 1 \cdot s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0, \quad (2.425)$$

budou hodnoty koeficientů

$$\begin{aligned} A_0 &= (-1)^n s_1 s_2 \dots s_n, \\ A_1 &= (-1)^{n-1} (s_1 s_2 \dots s_{n-1} + s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_n + \dots + s_2 s_3 \dots s_n), \\ A_2 &= (-1)^{n-2} (s_1 s_2 \dots s_{n-2} + s_1 s_2 \dots s_{n-3} s_{n-1} + \dots + s_3 s_4 \dots s_n), \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= (-1)^{n-(n-1)} (s_1 + s_2 + \dots - s_n) = -s_1 - s_2 - \dots - s_n. \end{aligned} \quad (2.426)$$

*Tvar Langrangeovy funkce*, pro případ, že pouze koeficient  $A_0$  bude ovlivnitelný, bude

$$F(s_1, s_2, \dots, s_n) = g_0 + \lambda_1 (A_1 - g_1) + \lambda_2 (A_2 - g_2) + \dots + \lambda_{n-1} (A_{n-1} - g_{n-1}) \quad (2.427)$$

kde  $\lambda_k, k = 1$  až  $n-1$  jsou Langrangeovy multiplikátory.

Pro řešení vázaného extrému dostáváme podmínky:

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = A_1 - (-1)^{n-1} \overbrace{(s_1 s_2 \cdots s_{n-1} + \cdots + s_2 s_3 \cdots s_n)}^{g_1} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = A_2 - (-1)^{n-2} \overbrace{(s_1 s_2 \cdots s_{n-2} + \cdots + s_3 s_4 \cdots s_n)}^{g_2} = 0,$$

⋮  
⋮

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_{n-1}} = A_{n-1} - \overbrace{(-s_1 - s_2 - \dots - s_n)}^{g_{n-1}} = 0. \quad (2.428)$$

Do rov. (2.427) vstupují v konkrétním případě ty členy  $\lambda_i(A_i - g_i)$ , u nichž koeficient  $A_i$  nelze seřízením regulátoru ovlivnit (jsou tedy neovlivnitelné – konstantní). Rov. (2.427) je formulována pro případ, že koeficienty  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  jsou neovlivnitelné, takže jediným ovlivnitelným koeficientem je  $A_0$ , jehož maximum hledáme.

Vyřešením souboru rov. (2.427 a 2.428) získáme hledané hodnoty stavitelných parametrů regulátoru. Soustava (2.428) je řešitelná i při násobných kořenech.

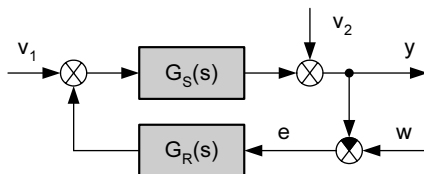
Lze vyslovit větu:

Regulační plocha je při aperiodickém průběhu minimální, jestliže charakteristické rovnice mají  $(n - \beta + 1)$  násobných kořenů, kde  $\beta$  je počet koeficientů  $A_i$ , které nelze ovlivnit seřízením regulátoru (jsou konstantami).

Z koeficientů  $A_1$  až  $A_{n-1}$  musí být alespoň jeden neovlivnitelným seřízením regulátoru ( $n$  je počet kořenů polynomu jmenovatele funkcionálu  $J_1$ ).

### Příklad 2.43

Metodou minimalizace lineární regulační plochy navrhněme optimální seřízení regulátoru obvodu podle obr. 2.124, kde  $v_1 = w = 0$  a  $v_2(t) = \eta(t)$ .



Obr. 2.124 K příkladu 2.43

Přenos soustavy:

$$G_S(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}.$$

**Řešení:** Lineární regulační plochu vypočítáme pomocí vztahu (2.421)

$$J_1 = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G_{V2}(s) - G_{V2}(0)].$$

Přenos poruchy  $v_2(t)$

$$G_{V2}(s) = \frac{Y(s)}{V_2(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(s+1)(s+2)}(r_0 + \frac{r_{-1}}{s})} = \dots = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + (2+r_0)s + r_{-1}};$$

$$G_{V2}(0) = \frac{2}{r_{-1}}.$$

Potom ve smyslu rov. (2.421 a 2.422) dostaneme

$$J_1 = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 3s^2 + (2+r_0)s + r_{-1}} = \frac{2!}{r_{-1}} = \min.$$

Nyní musíme najít maximální hodnotu  $r_{-1}$ , aby lineární regulační plocha byla minimální. Z  $J_1$  vyplývá:

- stupeň polynomu  $n = 3$ ,
- počet ovlivnitelných koeficientů  $\alpha = 2$ , ( $A_0 = r_{-1}$ ,  $A_1 = 2 + r_0$ ),
- počet neovlivnitelných koeficientů  $\beta = 1$  ( $A_{n-1} \equiv A_2 = 3$ ).

Podle Vietových formulí pro koeficienty charakteristického polynomu platí

$$A_0 = g_0 \Rightarrow r_{-1} = -s_1 s_2 s_3,$$

$$A_1 = g_1 \Rightarrow 2 + r_0 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3,$$

$$A_2 = g_2 \Rightarrow 3 = -s_1 - s_2 - s_3.$$

Protože v charakteristické rovnici uzavřeného regulačního obvodu

$$s^3 + 3s^2 + (2 + r_0)s + r_{-1} = 0$$

je pouze u koeficientů  $A_0$ ,  $A_1$  a  $A_2$  pouze jeden (tj.  $A_2$ ) neovlivnitelný, bude v Lagrangeově funkci rov. (2.427) pouze jeden Lagrangeův multiplikátor a tedy Lagrangeova funkce bude mít tvar

$$F(s_1, s_2, s_3) = g_0 + \lambda(A_2 - g_2) = -s_1 s_2 s_3 + \lambda(3 + s_1 + s_2 + s_3).$$