Vážení zákazníci,

dovolujeme si Vás upozornit, že na tuto ukázku knihy se vztahují autorská práva, tzv. copyright.

To znamená, že ukázka má sloužit výhradně pro osobní potřebu potenciálního kupujícího (aby čtenář viděl, jakým způsobem je titul zpracován a mohl se také podle tohoto, jako jednoho z parametrů, rozhodnout, zda titul koupí či ne).

Z toho vyplývá, že není dovoleno tuto ukázku jakýmkoliv způsobem dále šířit, veřejně či neveřejně např. umisťováním na datová média, na jiné internetové stránky (ani prostřednictvím odkazů) apod.

redakce nakladatelství BEN – technická literatura
redakce@ben.cz

Kapitola 2

Základy teorie fuzzy množin a jazyková proměnná

Tato kapitola je stručným úvodem do teorie fuzzy množin a modelování sémantiky přirozeného jazyka pomocí fuzzy množin. Čtenáře, který se zajímá o podrobnější informace, odkazujeme na odbornou literaturu.

2.1 Fuzzy množiny a fuzzy relace

V tomto článku zavedeme pojem fuzzy množiny, související pojmy a základní operace s nimi. Nejprve však zavedeme následující symboly, které budeme dále často používat.

V teorii fuzzy množin hrají významnou úlohu uspořádané množiny, popř. svazy. Proto budeme často používat běžné symboly pro svazové operace. Konkrétně to znamená, že výraz $a \vee b$ označuje *supremum* prvků a a b[*)]. Připomeňme, že v lineárně uspořádané množině (např. čísel) je supremum dvou prvků rovno jejich maximu. Podobně $a \wedge b$ označuje *infimum* prvků a a b a v lineárně uspořádané množině je infimum dvou prvků rovno jejich minimu. Obě operace známým způsobem rozšiřujeme také na množiny (i nekonečné).

2.1.1 Pojem fuzzy množiny

Ústředním pojmem ve fuzzy logice je pojem fuzzy množiny. Jak již název vypovídá, jde o jisté zobecnění klasického pojmu množiny. Jeho motivace vychází z následující myšlenky.

Představme si, že někdo po nás chce, abychom specifikovali množinu výšek všech *velkých* lidí. Nejprve můžeme říci, že každý vysoký člověk má výšku mezi 160 cm a 240 cm. Odrazovým můstkem bude množina $U = [160, 240]$ (cm). Avšak dále již narazíme na nepřekonatelné potíže. Zjistíme totiž, že nejsme

[*)] Pochopitelně za předpokladu, že tato operace má pro tyto prvky smysl.

schopni specifikovat velké lidi přesně. Jestliže se např. rozhodneme, že velký člověk má výšku minimálně 175 cm, lze ihned položit otázku: „A co výška 174.6 cm?“ Pouhým okem nejsme schopni výšky 175 cm a 174.6 cm od sebe odlišit. Avšak na základě našeho rozhodnutí by člověk mající první výšku byl „velký“, zatímco druhý ne — dospíváme tak k rozporu. Podotkněme, že takovýto rozpor by měl fatální důsledky. Např. hranicí pro odvedení brance do armády byla vždy výška 150 cm. Avšak při snaze o absolutní přesnost bychom např. člověka vysokého 150.05 cm odvedli, zatímco člověka majícího 149.95 cm ne, přestože pouhým okem a ani běžným měřením bychom obě výšky od sebe nerozlišili. Proto v běžné praxi nelze chápat číslo (v našem případě danou hranici) úplně přesně a často je lepší použít vágní slova jako „malý“, „velmi velký“, apod.

V teorii fuzzy množin musíme vyjít z množiny všech myslitelných výšek $U = [40, 240]$ (cm), kterou nazveme *univerzum*. Každé myslitelné výšce, tj. výšce z výše uvažovaného univerza přiřadíme číslo z intervalu $[0, 1]$, které bude vyjadřovat *stupeň pravdivosti* tvrzení, že daná výška označuje „velkého člověka“. Stupeň pravdivosti 0 znamená naprostou nepravdu (naprostý nesouhlas), zatímco stupeň 1 znamená naprostou pravdu (bezvýhradný souhlas). Čísla mezi těmito dvěma hodnotami vyjadřují částečný souhlas, který je tím větší, čím je větší stupeň pravdivosti. Definovaný stupeň pravdivosti je tedy stupeň příslušnosti (viz dále) dané výšky do fuzzy množiny všech výšek velkých lidí. Podle našeho příkladu můžeme říci, že např. „165 cm je vysoký člověk“ je pravda ve stupni 0.3, zatímco „190 cm je vysoký člověk“ je pravda ve stupni 1, tj. absolutní pravda, nebo také pravda „na 100%“. Často je totiž užitečné vyjadřovat stupně pravdivosti (příslušnosti) v %.

Příklad 2.1. Fuzzy množinu „výšek malých lidí“ můžeme charakterizovat pomocí následující funkce, která libovolné výšce (v cm) přiřadí stupeň pravdivosti podle tohoto předpisu:

$$A_{malý}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x \leq 165, \\ 0, & \text{jestliže } x > 185, \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x-165}{10}\right)^2\}, & \text{jestliže } 165 < x < 175, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{185-x}{10}\right)^2\}, & \text{jestliže } 175 \leq x \leq 185. \end{cases}$$

■

Podobnou úvahu lze provést i s jinými slovy přirozeného jazyka, např. výška, věk, nebo libovolné slovo, jehož obsahem jsou nějaké změřené hodnoty. To je obzvláště zajímavé pro fuzzy regulaci†).

Při definici fuzzy množiny tedy postupujeme takto: Nejprve definujeme množinu U nazývanou *univerzum diskurzu* nebo stručně *univerzum*. To může být

†) Pojem fuzzy množiny je pochopitelně obecnější, avšak pro potřeby fuzzy regulace se zpravidla omezujeme jen na fuzzy množiny definované na univerzu tvořeném čísly.

množina prvků libovolného druhu. Např. množina rostlin, lidí, nebo velmi často jistá množina čísel. Tento případ je významný zejména pro fuzzy regulaci, kde se pracuje s pojmy „odchylka“, „změna odchylky“ nebo „akční zásah“, a to jsou jistá čísla představující výsledky měření.

Fuzzy množina je z matematického pohledu funkce

$$A : U \longrightarrow [0,1]. \tag{2.1}$$

Řečeno slovy: fuzzy množina je tvořena prvky x vybíranými z množiny U, $x \in U$, z nichž každý má přiřazeno číslo $a \in [0,1]$ nazývané *stupeň příslušnosti* prvku x do fuzzy množiny A. Zároveň je $A(x)$ stupeň pravdivosti toho, že x patří do A. Stupně pravdivosti a stupně příslušnosti do fuzzy množiny jsou tedy ztotožněny.

Funkce (2.1) se někdy nazývá *funkce příslušnosti*. To znamená, že fuzzy množina je *ztotožněna* se svou funkcí příslušnosti. Stupeň příslušnosti prvku $x \in U$ do fuzzy množiny A se zapisuje jako funkční hodnota $A(x)$. V odborné literatuře se někdy pro funkci příslušnosti používá speciální symbol μ. Pak se stupeň příslušnosti prvku x do fuzzy množiny A zapisuje jako $\mu_A(x)$. To je však jednak nepřesné a matoucí a navíc velmi nepraktické, neboť např. u složitěji definovaných fuzzy množin se zapisuje nepřehledný výraz do indexu, např. $\mu_{(A\cup B)\cap(B\cup \bar{D})}$. Proto v této knize nebudeme symbol μ používat.

Fuzzy množina je zobecněním klasické množiny také v následujícím smyslu. V teorii množin se definuje tzv. *charakteristická funkce* $\chi_A : U \longrightarrow \{0,1\}$ množiny A vzhledem k U takto:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x \in A, \\ 0, & \text{jestliže } x \notin A. \end{cases}$$

To znamená, že $\chi_A(x) = 1$, jestliže prvek x *patří* do množiny A a $\chi_A(x) = 0$, pokud do ní nepatří. Je ihned vidět, že funkce příslušnosti fuzzy množiny je zobecněním charakteristické funkce. Ztotožnění fuzzy množiny se svou funkcí příslušnosti je přirozené a není v rozporu s chápáním klasických množin, které jsou také často ztotožňovány se svými charakteristickými funkcemi. Všimněte si, že při definici fuzzy množiny vycházíme z univerza, což je klasická množina. Tedy fuzzy množiny rozšiřují a nikoliv popírají pojem množiny.

Fakt, že A je fuzzy množina v univerzu U definovaná v (2.1) často zapisujeme symbolem $A \underset{\sim}{\subset} U$. Explicitně se fuzzy množiny zapisují takto:

$$A = \left\{ {}^{a_1}/x_1, \dots, {}^{a_n}/x_n \right\}, \tag{2.2}$$

kde $x_1, \dots, x_n \in U$ jsou prvky, kterým jsou přiřazeny stupně příslušnosti $a_1, \dots, a_n \in (0,1]$, tj. prvky se stupněm příslušnosti 0 nejsou zahrnuty.

Příklad 2.2. Uvažujme univerzum $U = \{0, 1, \dots, 10\}$. Pak

$$A = \{{}^{0.4}/1, {}^{0.7}/2, {}^{0.5}/4, {}^{1}/6, {}^{1}/7, {}^{0.1}/9\} \tag{2.3}$$

je fuzzy množina v U do níž číslo 1 patří se stupněm příslušnosti 0.4, číslo 2 se stupněm příslušnosti 0.7, atd. Čísla z U, která nejsou v (2.3) uvedena, mají stupeň příslušnosti roven 0, tj. do A nepatří. ∎

Není-li univerzum konečná množina a prvky fuzzy množiny nelze zapsat výčtem (2.2), zapisujeme fuzzy množinu takto:

$$A = \left\{ {}^{a_i}/x_i \middle| i \in I \right\}, \tag{2.4}$$

kde i je nějaká indexová množina, popř. lze podrobněji specifikovat vlastnosti x_i a a_i. Jsou-li např. prvky x reálná čísla a stupně příslušnosti jsou dány nějakou funkcí, lze zapsat fuzzy množinu takto:

$$A = \left\{ {}^{f(x)}/x \middle| x \in \mathbb{R} \right\},$$

kde $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel.

V odborné, zejména starší literatuře se můžeme setkat také s tímto zápisem:

$$A = \int_{x \in \mathbb{R}} f(x)/x.$$

Symbol integrálu je zde použit ve významu sjednocení a nikoliv ve svém původním významu. Smysl tohoto zápisu je v tom, že se na fuzzy množinu lze také dívat jako na sjednocení tzv. fuzzy jednoprvkových množin (viz dále). V knize [31] je symbol integrálu nahrazen symbolem velkého sjednocení, tj.

$$A = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} f(x)/x.$$

Nejpřesnější je však zápis (2.2) resp. (2.4), a proto se ho budeme v dalším výkladu držet.

Důležitou roli v teorii fuzzy množin mají následující tři klasické množiny:

(a) *Nosič*

$$\mathrm{Supp}(A) = \{x \mid A(x) > 0\},$$

tj. nosič fuzzy množiny A je *množina* všech prvků univerza, jejichž stupeň příslušnosti do A je nenulový. Tato množina je velmi důležitá, protože obsahuje všechny prvky, které jsou pro nás zajímavé (prvky se stupněm příslušnosti 0 nejsou zajímavé, neboť mohou být zcela libovolné).

Příklad 2.3. Nosič fuzzy množiny A ve (2.3) je

$$\mathrm{Supp}(A) = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}.$$

∎

(b) *a-řez*[‡)]

$$A_a = \{x \mid A(x) \geq a\}, \tag{2.5}$$

tj. a-řez je *množina* prvků majících stupeň příslušnosti větší nebo roven zadanému stupni a. Tuto množinu získáme z fuzzy množiny A „odřezáním“ všech prvků se stupněm příslušnosti menším než a.

Příklad 2.4. Nechť A je fuzzy množina z příkladu (2.2). Pak

$$\begin{aligned} A_{0.5} &= \{2, 4, 6, 7\} \\ A_{0.7} &= \{2, 6, 7\}. \end{aligned}$$

■

Pro a-řezy fuzzy množiny platí tento jednoduchý, avšak důležitý vztah:

Jestliže $a \leq b$, pak $A_b \subseteq A_a$.

Vztah mezi fuzzy množinou a jejími řezy je velmi úzký. Lze dokázat následující rovnost:

$$A(x) = \bigvee_{x \in A_a} a. \tag{2.6}$$

Rovnost (2.6) se nazývá *věta o reprezentaci* fuzzy množiny a znamená, že stupeň příslušnosti prvku x do fuzzy množiny A je roven supremu všech indexů a řezů, do nichž patří. Podle této věty tedy lze fuzzy množinu chápat jako posloupnost jejích a-řezů — viz obr. 2.1.

(c) *Jádro*

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \mid A(x) = 1\},$$

tj. jádro je *množina* těch prvků, které určitě patří do fuzzy množiny A. Představují *typické* prvky (prototypy) pro danou fuzzy množinu, např. typicky „velký“, „malý“, „dobrý“ apod. Ve výše uvedeném příkladě by „typicky velcí lidé“ byli lidé, řekněme, větší než 185 cm.

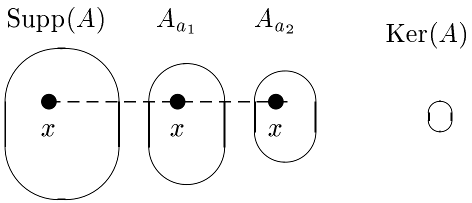
Příklad 2.5. Jádro fuzzy množiny A (2.2) je

$$\mathrm{Ker}(A) = \{6, 7\}.$$

■

Je zřejmé, že jádro fuzzy množiny je její 1-řez.

[‡)] V literatuře se někdy používá termín α-řez.



Obrázek 2.1: Grafické znázornění věty o reprezentaci. Fuzzy množinu A lze znázornit jako posloupnost jejích a-řezů. Na obrázku prvek x patří do nosiče a řezů A_{a_1} a A_{a_2}, kde $a_1 < a_2$.

Řekneme, že fuzzy množina je *normální*, jestliže $\mathrm{Ker}(A) \neq \emptyset$. Fuzzy množina, která není normální, se nazývá *subnormální*. Je zřejmé, že stupně příslušnosti všech jejích prvků jsou menší než 1.

Poznamenejme, že odhad stupňů příslušnosti je subjektivní. Z experimentálních výsledků však plyne, že různí lidé odhadují stupně obdobným způsobem, což znamená, že lidé rozumí stejným pojmům podobně. To pochopitelně není nijak překvapivý výsledek, protože jinak by byl přirozený jazyk nepoužitelný a nemohl by sloužit jako prostředek pro přenos informace. Je to však demonstrace toho, že pojem fuzzy množiny byl zaveden smysluplně.

V našich úvahách budeme také potřebovat *prázdnou fuzzy množinu*, která je definována jako fuzzy množina, která neobsahuje žádné prvky

$$\emptyset = \left\{ {}^{0}\!/x \middle| \, x \in U \right\},$$

tj. je chápána stejně jako prázdná množina v klasické teorii množin, a proto je pro ni použit stejný symbol.

Důležitou roli hraje *fuzzy jednoprvková množina* (singleton)

$$\left\{ {}^{a}\!/x \right\}, \tag{2.7}$$

což je fuzzy analogie klasické jednoprvkové množiny. Někdy se také říká *fuzzy jednotka*. Výraz (2.7) znamená, že pouze prvek $x \in U$ patří do fuzzy jednoprvkové množiny, a to se stupněm příslušnosti $a > 0$. Pokud $a = 1$, dostáváme klasickou jednoprvkovou množinu. Abychom zjednodušili vyjadřování, budeme používat pojem *obecná fuzzy jednotka* pro fuzzy množinu (2.7), v níž může být $a < 1$ a *fuzzy jednotka*, jestliže $a = 1$.

Pojem fuzzy jednotky je velmi důležitý zejména ve fuzzy regulaci, protože takto lze chápat výsledek konkrétního měření.

Příklad 2.6. Nechť teplota změřená v peci je 950 °C. Pak ji můžeme chápat jako fuzzy jednotku

$$\{1/950\ °\mathrm{C}\}.$$

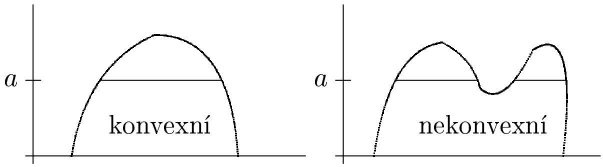
■

Poslední pojem, který v tomto odstavci zavedeme, je konvexní fuzzy množina. Je to důležitý pojem, který má smysl, jestliže univerzum je nějaká podmnožina množiny reálných čísel. Speciálně se s konvexními množinami setkáme při definici fuzzy čísla.

Fuzzy množina $A \underset{\sim}{\subseteq} U \subseteq \mathbb{R}$ je *konvexní,* jestliže pro libovolné prvky $x, y \in U$ a libovolné $0 \leq \lambda \leq 1$ platí

$$A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq A(x) \wedge A(y).$$

Lze ukázat, že fuzzy množina je konvexní, právě když každý její a-řez je souvislý interval. Srovnání konvexní a nekonvexní fuzzy množiny je znázorněno na obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Konvexní a nekonvexní fuzzy množina.

Jestliže U je je množina, pak množinu všech fuzzy množin v univerzu U označíme

$$\mathcal{F}(U) = \{A \mid A \underset{\sim}{\subseteq} U\}. \tag{2.8}$$

Čistě z matematického hlediska je $\mathcal{F}(U)$ množina všech funkcí $U \longrightarrow [0,1]$, tj.

$$\mathcal{F}(U) = [0,1]^U = \{f \mid f : U \longrightarrow [0,1]\}.$$

Závěrem ještě definujme vzdálenost dvou fuzzy množin. Nechť $A, B \underset{\sim}{\subseteq} U$ jsou fuzzy množiny, U je konečné univerzum a $p > 0$ je nějaké číslo (zpravidla přirozené). Pak *p-vzdálenost* fuzzy množin A a B je číslo

$$d^p(A,B) = \left(\sum_{x \in U} |A(x) - B(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.9}$$

Zpravidla klademe $p = 1$ nebo $p = 2$. Vyšší čísla mohou sotva mít nějaký smysl. Tato definice pro praxi stačí. Pokud chceme uvažovat nekonečné univerzum U, pak musíme nahradit sumu integrálem. Přitom však musí funkce příslušnosti fuzzy množin A a B být integrovatelné.

2.1.2 Operace s fuzzy množinami

S fuzzy množinami lze, podobně jako s klasickými množinami, definovat základní operace sjednocení, průniku a doplňku. Kromě nich však lze definovat ještě řadu dalších operací, které v klasické teorii množin buď nemají smysl nebo dávají výsledek, který je ekvivalentní s některou ze základních operací. To značně rozšiřuje možnosti teorie fuzzy množin.

Sjednocení

Sjednocení dvou fuzzy množin A a B je fuzzy množina C, která má funkci příslušnosti

$$C = A \cup B, \qquad \text{právě když} \qquad C(x) = A(x) \vee B(x). \tag{2.10}$$

Řečeno slovy: prvek $x \in U$ patří do sjednocení fuzzy množin $A, B \underset{\sim}{\subseteq} U$ se stupněm příslušnosti, který je roven většímu z obou stupňů $A(x)$ a $B(x)$.

Příklad 2.7. Nechť univerzum je stejné jako v příkladu 2.2 a nechť

$$A = \left\{{}^{0.4}/1, {}^{0.7}/2, {}^{0.5}/4, {}^{1}/6, {}^{1}/7, {}^{0.1}/9\right\}, \tag{2.11}$$
$$B = \left\{{}^{0.2}/1, {}^{0.7}/2, {}^{0.9}/3, {}^{0.6}/4, {}^{1}/6, {}^{0.8}/7, {}^{0.3}/9\right\}. \tag{2.12}$$

Pak

$$A \cup B = \left\{{}^{0.4}/1, {}^{0.7}/2, {}^{0.9}/3, {}^{0.6}/4, {}^{1}/6, {}^{1}/7, {}^{0.3}/9\right\},$$

kde např. stupeň příslušnosti 0.4 ve fuzzy jednotce ${}^{0.4}/1$ se dostane pomocí vztahu

$$0.4 \vee 0.2 = 0.4.$$

■

Operace suprema (maxima), která byla použita v definici sjednocení, přirozeným způsobem odpovídá logické disjunkci. Operaci sjednocení použijeme tehdy, jestliže chceme např. charakterizovat všechny lidi, kteří jsou „mladí nebo ve středním věku“. Definujeme fuzzy množinu mladých lidí a fuzzy množinu lidí ve středním věku a obě sjednotíme.

Nyní je jistě zřejmé, proč lze fuzzy množinu chápat jako sjednocení fuzzy jednotek. Fuzzy množinu A z příkladu 2.7 (2.11) lze totiž zapsat takto:

$$A = \{^{0.4}/1\} \cup \{^{0.7}/2\} \cup \{^{0.5}/4\} \cup \{^{1}/6\} \cup \{^{1}/7\} \cup \{^{0.1}/9\}.$$

Tento princip je často využíván při výpočtech, při nichž se stává, že dostaneme více fuzzy jednotek, jejichž nosič je tvořen stejným prvkem. Výsledkem je fuzzy jednotka, jejíž stupeň příslušnosti je maximální.

Příklad 2.8. Předpokládejme, že výsledkem výpočtů je fuzzy množina

$$C = \{^{0.4}/1, ^{0.7}/1, ^{0.9}/1, ^{0.3}/2, ^{0.4}/2, ^{0.6}/2, ^{1}/3, ^{0.5}/4, ^{1}/4, ^{0.1}/5\}. \quad (2.13)$$

Na základě uvedeného principu je (2.13) rovna fuzzy množině

$$C = \{^{0.9}/1, ^{0.6}/2, ^{1}/3, ^{1}/4, ^{0.1}/5\}. \quad (2.14)$$

■

Průnik

Průnik dvou fuzzy množin A a B je fuzzy množina C, která má funkci příslušnosti

$$C = A \cap B, \qquad \text{právě když} \qquad C(x) = A(x) \wedge B(x). \quad (2.15)$$

Řečeno slovy: prvek $x \in U$ patří do průniku fuzzy množin $A, B \underset{\sim}{\subseteq} U$ se stupněm příslušnosti, který je roven menšímu z obou stupňů $A(x)$ a $B(x)$.

Příklad 2.9. Pro fuzzy množiny (2.11) a (2.12) z příkladu 2.7 dostaneme

$$A \cap B = \{^{0.2}/1, ^{0.7}/2, ^{0.5}/4, ^{1}/6, ^{0.8}/7, ^{0.1}/9\},$$

kde např. stupeň příslušnosti 0.2 ve fuzzy jednotce $^{0.2}/1$ dostaneme pomocí vztahu

$$0.4 \wedge 0.2 = 0.2.$$

■

Operace infima (minima) v této definici přirozeným způsobem odpovídá spojce „a“ (logická konjunkce). Operaci průniku můžeme použít, jestliže chceme charakterizovat např. fuzzy množinu všech lidí, kteří jsou „chytří a mladí“. Musíme definovat fuzzy množinu mladých lidí a fuzzy množinu chytrých lidí a sestrojíme jejich průnik.

Ve fuzzy logice se zpravidla uvažují dvě základní konjunkce a dvě disjunkce, a to konjunkce a disjunkce interpretované pomocí operací minima a maxima a *Łukasiewiczova konjunkce* a *Łukasiewiczova disjunkce*, které interpretované pomocí speciálních operací

$$a \otimes b = 0 \vee (a + b - 1), \qquad \text{(Łukasiewiczova konjunkce)} \tag{2.16}$$

$$a \oplus b = 1 \wedge (a + b), \qquad \text{(Łukasiewiczova disjunkce)} \tag{2.17}$$

kde $a, b \in [0, 1]$. Jména těchto operací jsou podle slavného polského logika J. Łukasiewicze, který napsal základní práce z vícehodnotové logiky ve třicátých letech tohoto století. Łukasiewiczovy operace hrají v řadě logických úvah dokonce významnější roli, než obyčejné operace minima a maxima.

V teorii fuzzy množin tedy můžeme definovat operace *Łukasiewiczova průniku* a *Łukasiewiczova sjednocení* dvou fuzzy množin A a B

$$C = A \mathbin{\bigotimes\!\!\!\!\cap} B, \quad \text{právě když} \quad C(x) = A(x) \otimes B(x) = 0 \vee (A(x) + B(x) - 1), \tag{2.18}$$

$$C = A \uplus B, \quad \text{právě když} \quad C(x) = A(x) \oplus B(x) = 1 \wedge (A(x) + B(x)). \tag{2.19}$$

Příklad 2.10. Pro fuzzy množiny (2.11) a (2.12) z příkladu 2.7 dostaneme

$$A \mathbin{\bigotimes\!\!\!\!\cap} B = \left\{{}^{0.4}/2, {}^{0.1}/4, {}^{1}/6, {}^{0.8}/7\right\},$$

kde např. stupeň příslušnosti 0.4 ve fuzzy jednotce ${}^{0.4}/2$ dostaneme pomocí vztahu

$$0.7 \otimes 0.7 = 0 \vee (0.7 + 0.7 - 1) = 0.4.$$

Podobně

$$A \uplus B = \left\{{}^{0.6}/1, {}^{1}/2, {}^{0.9}/3, {}^{1}/4, {}^{1}/6, {}^{1}/7, {}^{0.4}/9\right\},$$

kde např. stupeň příslušnosti 1 ve fuzzy jednotce ${}^{1}/2$ dostaneme pomocí vztahu

$$0.7 \oplus 0.7 = 1 \wedge (0.7 + 0.7) = 1.$$

■

Łukasiewiczův průnik je přísnější než obyčejný průnik. Můžeme ho použít tehdy, jestliže jsou obě fuzzy množiny A a B v určitém smyslu ve vzájemně negativním vztahu nebo si jejich vztahem nejsme jisti. Např. „velmi velké a velmi tenké stromy“ — být „velký strom“ do jisté míry popírá to, aby strom byl také „tenký“.