# Vážení zákazníci,

dovolujeme si Vás upozornit, že na tuto ukázku knihy se vztahují autorská práva, tzv. copyright.

To znamená, že ukázka má sloužit výhradně pro osobní potřebu potenciálního kupujícího (aby čtenář viděl, jakým způsobem je titul zpracován a mohl se také podle tohoto, jako jednoho z parametrů, rozhodnout, zda titul koupí či ne).

Z toho vyplývá, že není dovoleno tuto ukázku jakýmkoliv způsobem dále šířit, veřejně či neveřejně např. umisťováním na datová média, na jiné internetové stránky (ani prostřednictvím odkazů) apod.

*redakce nakladatelství BEN – technická literatura*
*redakce@ben.cz*

# 3. SYMBOLICKO-KOMPLEXNÍ METODA (SKM)

Tato kapitola je věnována prajednoduché metodě, kterou s výhodou používáme při popisu a analýze obvodů v *harmonickém ustáleném stavu*. Ze zkušenosti vím, že tato metoda dělá některým studentům až neuvěřitelné potíže. Do první úlohy jsem proto zařadil i stručný popis podstaty této metody.

## ÚLOHA 3.1

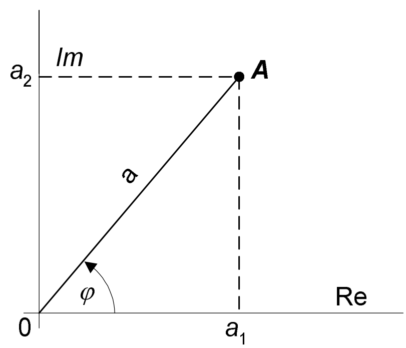
Jaká ja podstata symbolicko-komplexní metody?

Symbolicko-komplexní metoda umožňuje jednoduchou práci se soustavami v *harmonickém ustáleném stavu*; je založena na elementárních poznatcích z teorie komplexních čísel.

Na *obr. 3.1* bod v komplexní (neboli Gaussově) rovině vyznačuje komplexní číslo $\boldsymbol{A} = a_1 + \mathrm{j}a_2$ . $a_1$ je reálná a $a_2$ imaginární část komplexního čísla $\boldsymbol{A}$; symbolicky zapsáno je $a_1 = \mathrm{Re}[\boldsymbol{A}]$ a $a_2 = \mathrm{Im}[\boldsymbol{A}]$. Absolutní hodnota komplexního čísla $\boldsymbol{A}$ je

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

a v uvažovaném měřítku je rovna délce úsečky spojující počátek komplexní roviny s bodem vyznačujícím komplexní číslo $\boldsymbol{A}$.




*Obr. 3.1*
*K úloze 3.1; komplexní číslo **A** v Gaussově rovině*

Úsečka svírá s kladnou reálnou poloosou úhel $\varphi$. Tento úhel je orientovaný, kladná orientace je (podle dohody) proti směru hodinových ručiček. Všechno uvedené ilustruje *obr. 3.1.*

Je zřejmé, že

$$a_1 = a \cos \varphi$$

a

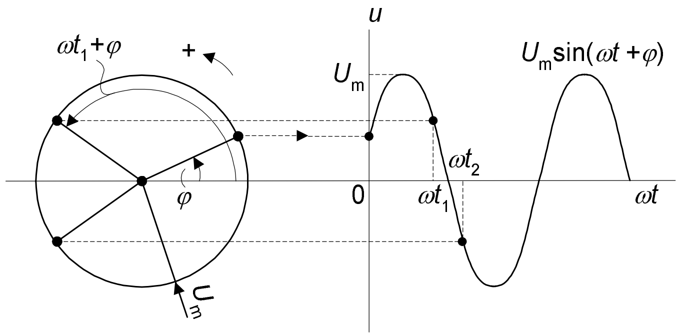
$$a_2 = a \sin \varphi$$

a naše komplexní číslo můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{A} = a\cos\varphi + \mathrm{j}.a\sin\varphi = a(\cos\varphi + \mathrm{j}.\sin\varphi)$$

Nyní na chvíli odbočme a připomeňme si, jak je možné nakreslit průběh sinusového napětí $U_m\sin(\omega t + \varphi)$ (podobně bychom nakreslili třeba průběh sinusového proudu).

Nakresleme ve zvoleném měřítku úsečku, jejíž délka odpovídá velikosti amplitudy $U_m$. V čase $t = 0$ tato úsečka svírá s vodorovnou osou úhel $\varphi$. V čase $t_1$ bude naše úsečka svírat úhel $\omega t_1 + \varphi$ v čase $t_2$ úhel $\omega t_2 + \varphi$ atd. Jak nakreslíme odpovídající body sinusoidy ukazuje *obr. 3.2*.




*Obr. 3.2 K úloze 3.1; konstrukce sinusoidy*

Nyní nechme úsečku $U_m$ rotovat v komplexní rovině. Jeden koncový bod úsečky nechme v počátku této roviny, druhý se zřejmě bude pohybovat po kružnici (o poloměru $U_m$). V okamžiku $t = 0$ bude bod na kružnici odpovídat komplexnímu číslu $U_m(\cos\varphi + \mathrm{j}\ .\ \sin\varphi)$,
v $t_1$ komplexnímu číslu $U_m[\cos(\omega t_1 + \varphi) + \mathrm{j}\ .\ \sin(\omega t_1 + \varphi)]$,
v $t_2$ komplexnímu číslu $U_m[\cos(\omega t_2 + \varphi) + \mathrm{j}\ .\ \sin(\omega t_2 + \varphi)]$ atd.

Použitím Eulerovy věty můžeme uvedené vztahy zapsat ve tvaru
$U_m e^{\mathrm{j}\varphi}$, $U_m e^{\mathrm{j}(\omega t_1 + \varphi)}$, $U_m e^{\mathrm{j}(\omega t_2 + \varphi)}$ atd. A nyní již jsme u podstaty metody. Je zřejmé, že

$$U_m \sin\varphi = \mathrm{Im}\left[U_m e^{\mathrm{j}\varphi}\right]$$

$$U_m \sin(\omega t_1 + \varphi) = \mathrm{Im}\left[U_m e^{\mathrm{j}(\omega t_1 + \varphi)}\right]$$

$$U_m \sin(\omega t_2 + \varphi) = \mathrm{Im}\left[U_m e^{\mathrm{j}(\omega t_2 + \varphi)}\right]$$

atd., takže pro *libovolný okamžik t* platí

$$U_m \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\left[U_m e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}\right] = \mathrm{Im}\left[U_m e^{\mathrm{j}\omega t} e^{\mathrm{j}\varphi}\right]$$

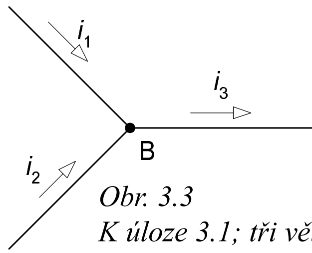
Našemu napětí v okamžiku $t$ odpovídá na imaginární ose úsek (v uvažovaném měřítku) dlouhý $U_m\sin(\omega t + \varphi)$.

Podívejme se na *obr. 3.3*. Uvažujme, že známe proudy $i_1(t) = I_{m1}\sin(\omega t + \varphi_1)$ a $i_2(t) = I_{m2}\sin(\omega t + \varphi_2)$ a máme určit proud $i_3(t) = I_{m3}\sin(\omega t + \varphi_3)$. Pro uzel B podle proudového (prvního) Kirchhoffova zákona platí

$$i_3(t) = I_{m3}\sin(\omega t + \varphi_3) = I_{m1}\sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m2}\sin(\omega t + \varphi_2) \qquad \text{(a)}$$

Pokud by okamžité hodnoty proudů byly dány číselně, čekalo by nás sice triviální, ale přesto poněkud nepříjemné počítání. A což teprve, kdybychom museli sečítat (nebo odečítat) třeba dvacet proudů!

Pokud si dobře promyslíme poznatky z našeho výletu do úvodu teorie o komplexních číslech vidíme, že rov. (a) můžeme napsat ve tvaru




*Obr. 3.3*
*K úloze 3.1; tři větve spojené v jednom uzlu*

$$\mathrm{Im}\left[I_{m3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_3)}\right] = \mathrm{Im}\left[I_{m3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_3}\right] = \mathrm{Im}\left[I_{m1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_1)}\right] +$$

$$+\mathrm{Im}\left[I_{m2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_2)}\right] = \mathrm{Im}\left[I_{m1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}\right] + \mathrm{Im}\left[I_{m2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}\right]$$

Znovu zdůrazněme, že tato rovnice je vlastně rov. (a) zapsaná jen poněkud jinak.

Chceme-li získat imaginární část součtu (či rozdílu) dvou nebo více komplexních funkcí, sečteme (odečteme) jednoduše imaginární části těchto funkcí.

Nyní celý postup uděláme *zdánlivě složitější*. Abychom dostali rov. (a) můžeme také postupovat tak, že nejprve sečteme komplexní funkce času $I_{m1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$ a $I_{m2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$. Dostaneme komplexní funkci času $I_{m3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_3}$ a z té vezmeme její imaginární část. To, co jsme uvedli nyní zapišme:

$$I_{m3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_3} = I_{m1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} + I_{m2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$$

Zastavme se u této rovnice. Je vidět, že ji můžeme vykrátit členem $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. Namísto abychom sečítali komplexní funkce času postačí, abychom sečetli *komplexní konstanty*, což je jistě jednodušší:

$$I_{m3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_3} = I_{m1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} + I_{m2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$$

Pokud budeme chtít znát *okamžitou hodnotu* proudu $i_3(t)$, stačí získanou komplexní konstantu vynásobit členem $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ a z výsledku vzít imaginární část.

Ještě jednou všechno shrňme. Namísto toho, abychom sečítali (či odečítali) funkce času, budeme sečítat (či odečítat) komplexní konstanty, což je *podstatně jednodušší*.

Nyní se dohodněme, že komplexní čísla $I_{m1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$, $I_{m2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$ a $I_{m3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_3}$ budeme značit $\boldsymbol{I}_{m1}$, $\boldsymbol{I}_{m2}$ a $\boldsymbol{I}_{m3}$ a nazývat *komplexní amplitudy*. Podobně $\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_{m1}/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_{m1}/\sqrt{2}$ a $\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{I}_{m3}/\sqrt{2}$ jsou *komplexní efektivní hodnoty*. Uvedené veličiny se označují jako *fázory*.

Uvažujme rotující fázor $\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. Zřejmě platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

a

$$\int \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}.\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}$$

Namísto obecně platné rovnice pro induktor

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

nyní můžeme pro harmonicky proměnné veličiny psát rovnici

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{m} = \mathrm{j}\omega L\boldsymbol{I}_\mathrm{m}$$

nebo

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{j}\omega L\boldsymbol{I}$$

V těchto vztazích je $\mathrm{j}\omega L$ *komplexní indukční reaktance*.

Podobně namísto obecně platné rovnice pro kapacitor (uvažujeme nulovou počáteční podmínku)

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi).\,\mathrm{d}\xi$$

dostaneme

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{m} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\boldsymbol{I}_\mathrm{m} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\boldsymbol{I}_\mathrm{m}$$

nebo

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\boldsymbol{I} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\boldsymbol{I}$$

kde $1/(\mathrm{j}\omega C) = -\mathrm{j}/(\omega C)$ je *komplexní kapacitní reaktance*.

Uvažujme obecný pasivní dvojpól, který je v harmonickém ustáleném stavu. Takový dvojpól můžeme charakterizovat *komplexní impedancí*

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{U}_\mathrm{m}}{\boldsymbol{I}_\mathrm{m}} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I}}$$

nebo *komplexní admitancí*

$$\boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{I}_\mathrm{m}}{\boldsymbol{U}_\mathrm{m}} = \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{U}} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}}$$

$\boldsymbol{Z}$ a $\boldsymbol{Y}$ se označují jako komplexní imitance.
Impedance je $Z = |\boldsymbol{Z}|$ a admitance $Y = |\boldsymbol{Y}|$.

## ÚLOHA 3.2

Napětí je dáno vztahem $u = \sqrt{2}\ 5\sin(\omega t - 45°)$ V. Určeme jeho komplexní amplitudu a komplexní efektivní hodnotu.

Komplexní amplituda napětí je $\boldsymbol{U}_\mathrm{m} = \sqrt{2}\,5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}.45^\circ}$ V a komplexní efektivní hodnota pak $\boldsymbol{U} = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}.45^\circ}$ V.

## ÚLOHA 3.3

Komplexní efektivní hodnota proudu je $\boldsymbol{I} = 3 - \mathrm{j}\ .\ 2$ A. Jeho okamžitá hodnota je $i = I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi)$. Určeme tuto hodnotu.

Amplituda proudu je

$$I_\mathrm{m} = \sqrt{2}|\boldsymbol{I}| = \sqrt{2}\sqrt{3^2 + (-2)^2}$$

a úhel

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[\boldsymbol{I}]}{\mathrm{Re}[\boldsymbol{I}]} = \mathrm{arctg}\frac{-2}{3}$$

Můžeme však také přímo psát

$$i(t) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\boldsymbol{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\sqrt{3^2 + (-2)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j.arctg}\frac{-2}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \sqrt{2}\sqrt{3^2 + (-2)^2}\sin\left(\omega t + \mathrm{arctg}\frac{-2}{3}\right)$$

## ÚLOHA 3.4

Bylo by možné zavést pojem impedance i bez použití symbolicko-komplexní metody?

Samozřejmě, možné by to bylo, ale toto zavedení by bylo dosti komplikované. Ukážeme to na jednoduchém příkladu.

Zabývejme se obvodem na *obr. 3.4.* a dejme si za úkol určit proud, který jím protéká. Tuto úlohu bychom bez znalosti SKM museli řešit tak, že bychom vyšli z diferenciální rovnice