

Vážení zákazníci,

dovolujeme si Vás upozornit, že na tuto ukázkou knihy se vztahují autorská práva, tzv. copyright.

To znamená, že ukázka má sloužit výhradně pro osobní potřebu potenciálního kupujícího (aby čtenář viděl, jakým způsobem je titul zpracován a mohl se také podle tohoto, jako jednoho z parametrů, rozhodnout, zda titul koupí či ne).

Z toho vyplývá, že není dovoleno tuto ukázkou jakýmkoliv způsobem dále šířit, veřejně či neveřejně např. umístováním na datová média, na jiné internetové stránky (ani prostřednictvím odkazů) apod.

redakce nakladatelství BEN – technická literatura
redakce@ben.cz

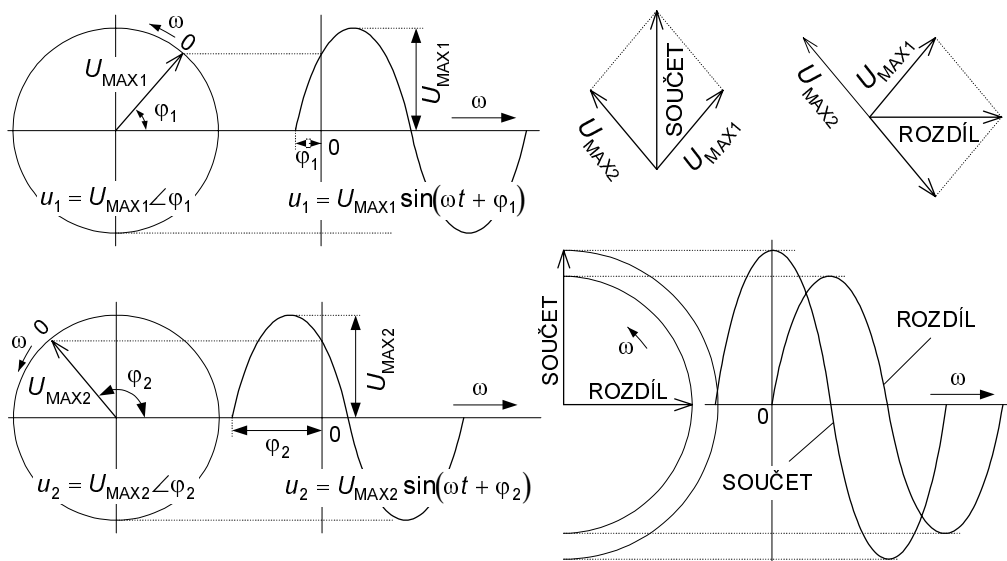


3. KMITOČTOVĚ ZÁVISLÉ OBVODY

Přísně vzato nelze žádný prvek považovat za dokonale lineární a kmitočtově nezávislý pro teoreticky nekonečný rozsah napětí a kmitočtu. Nadále však budeme považovat za kmitočtově závislé obvody pouze zapojení, ve kterých se vyskytují *reaktance*.¹⁾ Tyto obvody s kondenzátory a cívkami mají v elektronice velmi široké použití, např. jako filtry.

3.1 Fázorový počet v elektronice

Pro matematický popis těchto obvodů se s výhodou používá *komplexní počet*. Základní rozdíl proti předchozím výpočtům spočívá ve vektorovém charakteru veličin. Napětí, proud, ale i zdánlivý odpor - *impedance* mají nejen velikost, ale i směr (počáteční fázový posuv), takže je nelze jednoduše sčítat. Tento vektorový (fázorový) počet do elektroniky zavedl anglický vědec OLIVER HEAVISIDE (*1850, †1925) a tím značně zjednodušil elektrotechnické výpočty. Mimo jiné je i autorem myšlenky pupinace, telegrafních rovnic a operátorového počtu. Jeho operátorový počet umožnil velmi elegantní a rychlé řešení složitých diferenciálních rovnic popisujících přechodné děje. Jako zajímavost lze uvést, že matematici tuto metodu přijali a teoreticky vysvětlili až poměrně dlouho po jeho smrti.

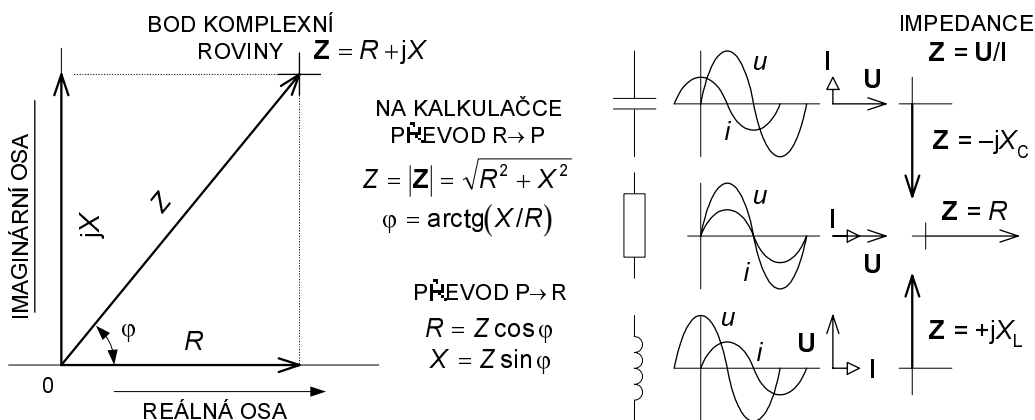


Obr. 3.1 Vektorový součet a rozdíl dvou harmonických napětí

¹⁾ Viz také rozdělení prvků na kmitočtově závislé a nezávislé v první kapitole.

Na obr. 3.1 je znázorněna známá grafická metoda odvození sinusového (*harmonického*) průběhu signálu $u = U_{\text{MAX}} \sin(\omega t + \varphi)$ pomocí průvodiče rotujícího konstantní úhlovou rychlostí $\omega = \alpha/t$.¹⁾ Celou kružnici (otočení o úhel 2π) vektor opíše za dobu periody T , takže musí platit $\omega = 2\pi/T$ nebo po dosazení za kmitočet ($f = 1/T$) $\omega = 2\pi f$. Představa rotujícího vektoru umožňuje snadné sčítání nebo odčítání harmonických signálů se stejným kmitočtem a s rozdílnými počátečními fázovými posuvy φ . Vektory samozřejmě není nutné sčítat graficky, ale je možné je rozložit na pravoúhlé složky a sčítat nebo odečítat podle pravidel pro počítání s vektory. Protože je zažité počítání s efektivními hodnotami harmonického průběhu $U = U_{\text{MAX}}/\sqrt{2}$, kreslí se i fázorové diagramy pro efektivní hodnoty.

I když je možné vystačit pro praktické výpočty s představou rotujících časových vektorů (*fázorů*), dává se při praktických výpočtech přednost tzv. *symbolickému počtu v komplexní rovině*. Oproti matematice se pro imaginární svislou složku vektoru nepoužívá písmenko i , protože by se pletlo s okamžitou hodnotou proudu, ale písmenko $j = \sqrt{-1}$. Každý bod v komplexní rovině má reálnou (vodorovnou) a imaginární (svislou) souřadnici. Komplexní veličina bude pro rozlišení značena tučným písmem, např. $\mathbf{Z} = R + jX$. Kromě složkového tvaru lze komplexní číslo zapsat v trigonometrickém tvaru: $\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi)$. Závorku také lze nahradit praktičtějším exponenciálním tvarem: $\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|e^{j\varphi}$. Tento tvar odpovídá vyjádření vektoru velikost/úhel: $\mathbf{Z} = Z \angle \varphi$ a používá se při násobení a dělení komplexních čísel. Složkový tvar je naopak výhodnější pro operace sčítání a odečítání. Vzájemné převody bývají k dispozici na kalkulátorech.



Obr. 3.2 Vektorový charakter impedance základních prvků

3.2 Reaktance v obvodu střídavého proudu

Podobně jako se ve fyzice rozlišuje průměrná rychlost a okamžitá rychlost, je možné definovat průměrný proud $I = Q/t$ a okamžitý proud jako změnu náboje $i = dQ/dt$. Pro náboj na kondenzátoru platí: $Q = C \cdot u$. Po dosazení získáme vztah:

$$i = C \frac{du}{dt}$$

¹⁾ V elektrotechnice je úhlová rychlost nazýván úhlový kmitočet a má stejnou jednotku rad/s.

nebo po úpravě:

$$u = \frac{1}{C} \int i dt .$$

To, že proud kondenzátorem je derivací napětí na kondenzátoru, můžeme využít pro odvození impedance kondenzátoru. Bude-li podle předchozího obrázku mít vstupní napětí sinusový průběh ($u = U_{\text{MAX}} \sin 2\pi f t$), získáme po derivaci: $i = C U_{\text{MAX}} 2\pi f \cos 2\pi f t$. Protože člen před kosinovou funkcí má význam amplitudy proudu, vyplývá z toho, že

$$\frac{U_{\text{MAX}}}{I_{\text{MAX}}} = \frac{U \cdot \sqrt{2}}{I \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi f C} = X_C$$

má rozměr ohmu. Veličina se nazývá *kapacitní reaktance* a je nepřímo úměrná kmitočtu. Protože funkce kosinus předbíhá funkci sinus o devadesát stupňů, říkáme, že u kondenzátoru proud předbíhá napětí. Fázory jsou vůči sobě posunuty o 90° takže

$$\mathbf{Z} = \frac{U \angle 0}{I \angle \pi / 2} = Z \angle -\pi / 2 .$$

Výsledná impedance má tedy fázový posuv -90° , a je proto záporně imaginární $\mathbf{Z} = -jX_C$. U operátorového počtu bývá zvykem sdružovat imaginární člen s kmitočtem, takže po úpravě rozšířením ($j^2 = -1$) je:

$$\mathbf{Z} = \frac{j}{j} \cdot \left(-j \frac{1}{2\pi f C} \right) = \frac{1}{j\omega C} .$$

Stejným způsobem lze z indukčního zákona

$$u = L \frac{di}{dt}$$

odvodit *indukční reaktanci* cívky $\mathbf{Z} = j\omega L$, která je přímo úměrná kmitočtu. Napětí na cívce předbíhá proud o 90° . Obě reaktance jsou čistě imaginární a z důvodu posuvu mezi napětím a proudem je vždy po čtvrtinu periody součin napětí a proudu kladný a po čtvrtinu záporný. To znamená, že elektrostatické nebo elektromagnetické pole vzniká a odebírá energii ze zdroje a pak zaniká a dodává energii zpět do zdroje. Na rozdíl od rezistoru, který má napětí i proud ve fázi, nevzniká tedy v ideálním kondenzátoru nebo cívce žádné teplo, pouze dochází k cyklické výměně energie mezi reaktancí a zdrojem. Tohoto poznatku se někdy využívá k návrhu bezztrátových předřadníků.

Pokud pomineme školácké vysvětlení, že střídavý proud protéká kondenzátorem, protože vlnovka střídavého proudu obejde překážku a rovný stejnosměrný proud narazí, můžeme vysvětlit vlastnosti kondenzátoru i jednoduchou úvahou. V obvodu stejnosměrného proudu (nejnižší možný kmitočet) proud kromě krátkého přechodového děje neprotéká (izolované desky). Kdežto v obvodu střídavého proudu se kondenzátor neustále nabíjí, vybíjí a přebíjí na opačnou polaritu. S

rostoucím kmitočtem se počet elektronů protékajících přírodnými vodiči za jednotku času zvyšuje, takže narůstá i proud, a proto i klesá zdánlivý odpor kondenzátoru. Je nutné zdůraznit, že se pořád jedná o proud nabíjející a vybíjející kondenzátor a přes nevodivé dielektrikum proud ve skutečnosti neprochází. Pro zapamatování posloupnosti napětí a proudu může pomoci představa, že kondenzátor je nádoba, do které nejdříve musí být napouštěn náboj, aby vzápětí začala narůstat výška hladiny (napětí).

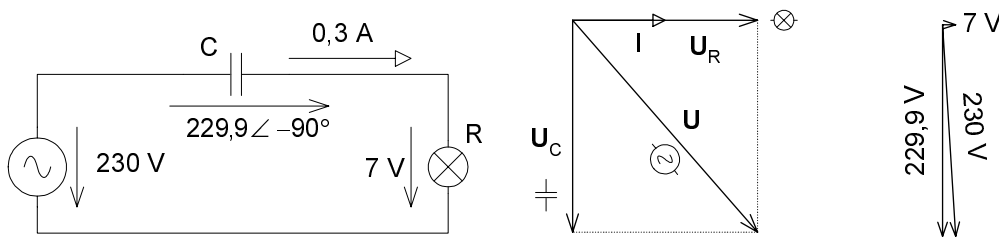
U cívky je posloupnost veličin opačná, tj. napětí předbíhá proud o 90° . Toto zpoždění proudu vyplývá z indukčního zákona. Pro zapamatování chování cívky v závislosti na kmitočtu je vhodné si uvědomit, že cívka je vlastně smotaný kus drátu. Z toho vyplývá, že po odeznění přechodného děje po připojení zdroje by cívka ve stejnosměrném obvodu měla mít prakticky zanedbatelný odpor. S rostoucím kmitočtem musí vznikat a zanikat magnetické pole v okolí cívky a cívka se zdánlivě brání změně protékajícího proudu. To se projevuje jako nárůst zdánlivého odporu, který se proto s rostoucím kmitočtem zvětšuje.

Příklad 3.1 Reaktance jako předřadník

Budeme uvažovat připojení žárovky 7 V/300 mA na napětí 230 V/50 Hz. Problém lze řešit buď transformátorem, což je drahé, ale nejlepší řešení, anebo předřadníkem. Při použití klasického srážecího odporu by na něm bylo téměř celé síťové napětí a protékal by jím celý jmenovitý proud žárovky. Ztrátový tepelný výkon by proto byl mnohokrát větší než výkon žárovky ($P = 223 \cdot 0,3 \approx 67$ W). Předřadná tlumivka by se cenou i rozměry blížila transformátoru, takže jako poslední řešení budeme uvažovat kondenzátor. Napětí na kondenzátoru se určí z fázorového diagramu pomocí PYTHAGOROVY věty:

$$U_C = \sqrt{230^2 - 7^2} = 229,89 \text{ V}.$$

Z OHMOVA zákona se zjistí potřebná reaktance $X_C = 229,98/0,3 = 766,3 \Omega$ a z reaktance se určí kapacita: $C = 1/(2\pi 50 \cdot 766,3) = 4,15 \mu\text{F}$. Kondenzátor musí vydržet minimálně dvojnásobek amplitudy síťového napětí (650 V).



Obr. 3.3 Bezeztrátový předřadník

3.3 Použití symbolického počtu

Při úpravách komplexních rovnic se lze ještě setkat se *sduženým komplexním číslem*, které je vzhledem k reálné ose umístěno symetricky. Pro sdužená komplexní čísla platí:

$\mathbf{Z} = a + jb$ a $\mathbf{Z}^* = a - jb$, popřípadě: $\mathbf{Z} = Ze^{j\varphi}$ a $\mathbf{Z}^* = Ze^{-j\varphi}$. Při výpočtech lze někdy využít snadno odvoditelná pravidla: $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^* = a^2 + b^2 = Z^2$, $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}^* = e^{j2\varphi}$, $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^* = 2a$, $\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^* = j2b$. V elektronice

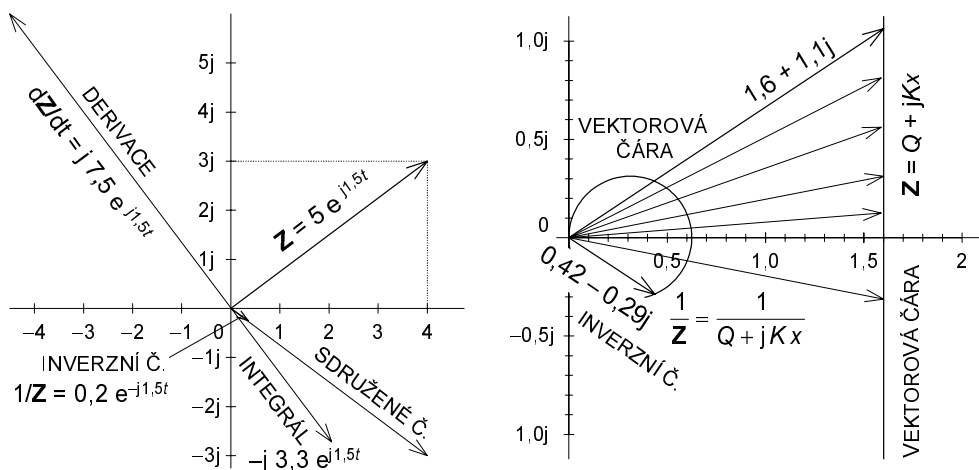
se kromě sdruženého čísla používá velmi často *inverzní* číslo, které v případě impedance představuje zdánlivou vodivost neboli *admitanci* $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$. S admitancí se snadněji počítá při paralelním řazení prvků. Poslední zajímavou vlastností komplexních čísel je snadnost derivování a integrování v exponenciálním tvaru:

$$\frac{dZ e^{j\omega t}}{dt} = j\omega Z e^{j\omega t} = \omega Z e^{j(\omega t + \pi/2)}$$

a

$$\int Z e^{j\omega t} dt = \frac{Z e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{Z}{\omega} e^{j(\omega t - \pi/2)}.$$

Při derivování se tedy vektor vynásobí a pootočí doleva o 90° a při integraci se podělí a otočí se opačným směrem ($1/j = -j = 1e^{-j\pi/2}$).



Obr. 3.4 Operace v komplexní rovině a vektorové křivky

Konec (šipka) vektoru může v závislosti na čase, kmitočtu nebo jiném parametru opisovat v komplexní rovině libovolnou křivku - *vektorovou čáru*. U harmonického průběhu rotovala šipka po kružnici. Pokud nebude amplituda signálu konstantní, může kružnice přejít např. ve šroubovici. Na obrázku je znázorněn další, poměrně častý případ přímky. Pokud se pro každý bod na přímce sestrojí inverzní vektor, získáme kružnici procházející počátkem jako vektorovou čáru inverzní k přímce. Transformace platí i opačně, tj. kružnice procházející počátkem se inverzně zobrazí jako přímka.

Příklad 3.2 Odvození reaktancí pomocí symbolického počtu

Pro okamžité napětí na cívce platí:

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Rovnici vyjádříme v symbolickém tvaru:

$$Ue^{j\omega t} = L \frac{dIe^{j\omega t}}{dt} = j\omega LIe^{j\omega t}.$$

Po zkrácení bude: $U = j\omega L \cdot I$. Stejně rychle lze odvodit i reaktanci kondenzátoru, pro změnu z integrální rovnice:

$$u = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Opět se dosadí:

$$Ue^{j\omega t} = \frac{1}{C} \int Ie^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega C} e^{j\omega t}.$$

A po zkrácení $e^{j\omega t}$ bude:

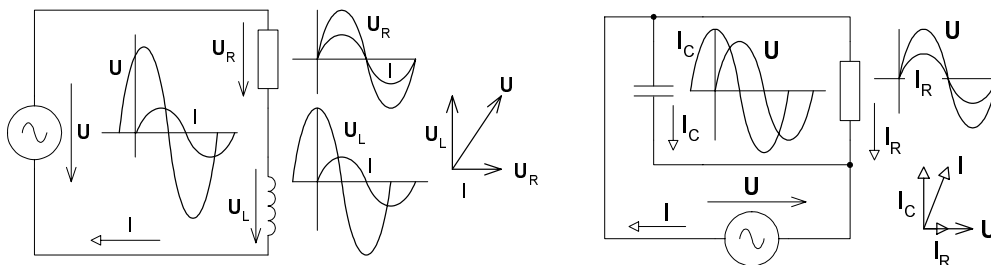
$$U = \frac{I}{j\omega C}.$$

Protože reaktance jsou imaginární a nemají reálnou složku, není k určení jejich velikosti nutná PYTHAGOROVA věta. Pro kondenzátor je: $X_C = 1/\omega C$ ($X_C = 1/j\omega C$) a pro cívku: $X_L = \omega L$.

Příklad 3.3 Náhradní schéma cívky a kondenzátoru

Stejně rychle a jednoduše lze řešit i složitější obvody. Jako příklad si uvedeme odvození impedance jednoduchého náhradního schématu cívky tvořeného sériovým spojením odporu vinutí s vlastní indukčností cívky. Podle II. KIRCHHOFFOVA zákona platí: $u = Ri + Ldi/dt$. Po úpravě do symbolického tvaru je: $Ue^{j\omega t} = RIe^{j\omega t} + j\omega LIe^{j\omega t}$. Po stejné úpravě jako v předchozím příkladu je: $U = (R + j\omega L) \cdot I$. Závorka má rozměr ohmu a nazývá se impedance $Z = R + j\omega L$. Ve shodě s posledním obrázkem by vektorovou čarou pro proměnný kmitočet byla v komplexní rovině přímka. Kmitočet ovšem nemůže být záporný, takže vektorovou čarou bude polopřímka v prvním kvadrantu a vektorovou čarou převrácené hodnoty (admittance) bude polokružnice ve čtvrtém kvadrantu.

U náhradního schématu kondenzátoru předpokládáme paralelní řazení ideálního kondenzátoru

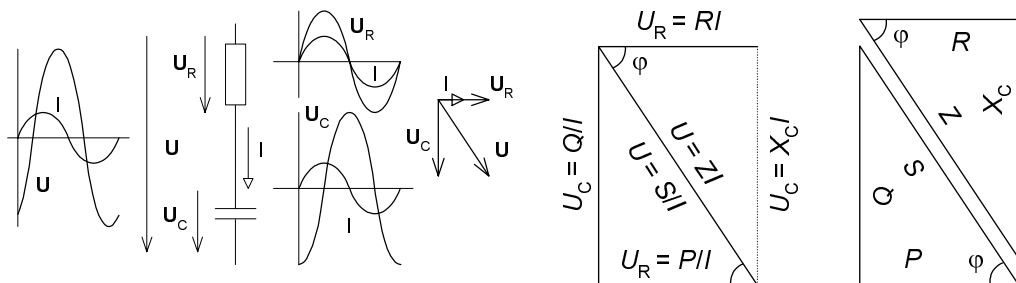


Obr. 3.5 Průběhy napětí a proudu v sériovém RL a paralelním RC obvodu

s jeho svodem. Podle I. KIRCHHOFFOVA zákona je: $i = Gu + Cdu/dt$ a v symbolickém tvaru: $\mathbf{I}e^{j\omega t} = G\mathbf{U}e^{j\omega t} + j\omega C\mathbf{U}e^{j\omega t}$. Po úpravě pokrácením a vytknutím je: $\mathbf{I} = (G + j\omega C) \mathbf{U}$. Závorka má rozměr siemensu a nazývá se admitance $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z} = G + j\omega C$. Vektorovou čarou je opět polopřímka a pro impedanci paralelního spojení opět polokružnice ve čtvrtém kvadrantu.

3.4 Impedanční a výkonové diagramy

Ke zjednodušení řešení střídavých obvodů lze využít i podobnosti trojúhelníků. Pokud se při kreslení fázorových diagramů budeme držet zásady, že společná veličina se kreslí do kladné reálné poloosy (volba počátku), můžeme tuto zvolenou veličinu považovat za reálné číslo. Násobení nebo dělení touto veličinou pak představuje násobení nebo dělení konstantou. Podle provedené



Obr. 3.6 Trojúhelník výkonů a impedancí

operace získáme výkonové, impedanční anebo admitanční (vodivostní) diagramy.

Pro činný výkon $P = S \cos \varphi$, jalový výkon $Q = S \sin \varphi$ a zdánlivý výkon $S = UI$ jsou pro rozlišení používány i jiné jednotky (W, VAR a VA), i když rozměr jednotky je u všech veličin shodný. V prakticky shodném případě odporu $R = Z \cos \varphi$, reaktance $X = Z \sin \varphi$ a impedance $Z = U/I$ se vektorový charakter veličiny v názvu jednotky neodrazí. Diagramy lze využít nejen pro přehledné určení velikostí, např.:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

a fáze $\varphi = \arctg(X/R)$, ale i k výpočtům v komplexní rovině, protože vektorový charakter veličin zůstává zachován, např. pro náš obvod je: $\mathbf{Z} = R - jX_C$. Pro paralelní spojení prvků lze stejným způsobem odvodit diagram výkonů a diagram vodivosti.

Oproti fázorovému diagramu napětí a proudu se diagram impedancí neotáčí úhlovou rychlostí ω . To lze opět nejsnadněji dokázat pomocí symbolického počtu: $\mathbf{Z} = \mathbf{U}e^{j(\omega t - \varphi)}/\mathbf{I}e^{j\omega t} = \mathbf{Z}e^{j\varphi}$. Zato diagram výkonů se otáčí dvojnásobnou rychlostí: $\mathbf{S} = \mathbf{U}e^{j(\omega t - \varphi)} \mathbf{I}e^{j\omega t} = \mathbf{S}e^{j(2\omega t - \varphi)}$. Důkaz toho, že např. činný výkon na spotřebiči má dvojnásobný kmitočet oproti kmitočtu zdroje, lze udělat snadno i bez znalosti symbolického počtu. Pro okamžitý výkon na odporu platí:

$p = Ri^2 = R I_{MAX}^2 \cdot \sin^2(\omega t) = R I_{MAX}^2 \cdot [1 - \cos(2\omega t)]/2$. O okamžitém tepelném výkonu se proto říká, že má tepavý charakter. Výkon klesá k nule, ale pořád má harmonický průběh (funkce kosinus).

Příklad 3.4 Měření indukčnosti metodou tří ampérmetrů