

# PŘEDMLUVA

Především musíme zdůraznit, že kniha není z těch, které mají poučovat, přičemž by autoři získali téměř všechny informace z druhé, třetí či kolikáté ruky. Mluví skoro výhradně o tom, co sami přečetli a jak to pochopili. Těch knih, které uvádějí zprostředkované informace, je na trhu dostatek. Nehodláme je jmenovat, ale některé se objevují určitě i v našem seznamu literárních odkazů. (Nemohli jsme je totiž zcela ignorovat, neboť i přes uvedenou skutečnost obsahují nejen jeden cenný poznatek.)

Kniha se snaží zpřístupnit výsledky Gödelova fundamentálního článku, který navždy změnil nejen tvář matematiky, ale především filozofii poznání, jeho úplnosti a pravdivosti. Jeho vydáním se matematika i filozofie kolem ní od základů proměnily. Na prach se rozpadly vizionářské touhy mnoha věhlasných matematiků (např. Hilberta a Kleina), kteří spatřovali v axiomaticky vystavěné budově matematiky útočiště „**absolutní pravdy**“. Ale nic takového samozřejmě neexistuje!

Jak snad dosti výmluvně naznačuje název, kniha, kterou držíte právě v ruce, se věnuje jedinému tématu – **stěžejnímu článku Kurta Gödela z roku 1931**. Originál vyšel pod názvem „Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I“. Přesný český překlad zní pak takto: **O formálně nerozhodnutelných tvrzeních *Principia mathematica* a příbuzných systémů I**. Necháme prozatím stranou význam římské číslice I v názvu – bude dále vysvětlen. I kdyby autor již nic více nenapsal, tak to jistě stačí k tomu, abychom museli totálně přehodnotit své filozofické názory na postavení, význam a funkci matematiky i exaktních věd v procesu lidského poznání. Dvě z vět, které článek obsahuje, způsobily doslova a do písmene **gnoseologickou revoluci**. A způsobují ji vlastně až dodnes. Stále se z času na čas objevují představy, že jsou Gödelovy závěry mylné, nebo že je alespoň nutno nepřisuzovat jim takový význam. Bohužel jsou to ovšem platná matematická tvrzení, s nimiž je třeba se smířit – s tím už nikdo nic nenadělá! „Kritici“ by na to neměli zapomínat.

Nevíme, kdo a kde vyslovil či napsal úvodní motto. Jeden z autorů ho zkrátka někde četl nebo snad slyšel. Sotva bychom ale našli výstižnější. V podstatě charakterizuje naši knihu naprosto přesně. Kniha nezahrnuje všechno, obsahuje jen výklad Gödelovy originální práce. Matematika, nebo v našem případě přesněji matematická logika, od té doby udělala obrovský kus práce a odhalila mnohá tajemství. Ovšem právě výklad původních Gödelových výsledků jsme měli při psaní na mysli. Chtěli jsme je podat především v té podobě, jak je kdysi autor prezentoval. Historická autenticita textu by neměla být pokud možno setřena. Z moderního pohledu jsou Gödelovy závěry vyloženy v mnoha publikacích, např. v [26, 34, 37]. My jsme měli v úmyslu dodržet originální symboliku, formulace a z velké části i terminologii, ačkoliv právě ona je v našich snahách největším oříškem. Jenom tak bylo možné demonstrovat úroveň matematické logiky v době, v níž výsledky vznikaly.

Naše knížka se svým omezeným záběrem tedy rozhodně „neví“ všechno. Výklad v ní se však snaží být co možná nejpodrobnější. Nešetřili jsme příklady, komentáři ani výkladem těch skutečností, které autor pouze stroze naznačuje v poznámkách, nebo ponechává zcela bez komentáře. V tomto ohledu nám není znám žádný obdobný text. Jestliže budeme parafrázovat naše motto, potom můžeme říci, že kniha *sice* „neví“ všechno, ovšem rozhodně *se snaží tomu „porozumět“*.

O Gödelových objevech je velmi těžké napsat jakýkoli text, ať již populární, nebo ryze odborný. Obojí obdivujeme. Po vlastních zkušenostech je nám jasné, že napsat o nich záživný populární text musí být téměř nadlidský výkon. Přesto se to ojedinele podařilo. Zmiňme tady třeba knihy [17, 28, 34], z nichž každá se jim věnuje z jiného aspektu. Fascinující kniha [34] má

mezi nimi ale evidentně výjimečné postavení. Je sice populární, avšak jistě není určena netrpělivému čtenáři. O to větší dobrodružství poznání zprostředkuje všem trpělivým. Mezi odbornými monografiemi, které se věnují matematické logice, včetně věhlasných Gödelových výsledků, jsou rovněž skvělé texty, zmiňme alespoň [26]. Pro odborníka je asi mnohem snazší napsat text odborný nežli populární, ale ani jedno není určitě jednoduché, natož triviální.

Oba zmíněné typy knih se však na knižním trhu objevují. Zdálo se nám ale, že zcela chybí kniha, která by se nacházela někde mezi odbornou a populární polohou, i když by si ji Gödelova práce s odstupem let zasloužila. Naše kniha se snaží tuto mezeru alespoň částečně vyplnit. Na jedné straně je text dotován mnohem větším počtem příkladů, než bývá obvyklé u standardních odborných publikací. Na straně druhé se však snaží přiblížit přesnosti originálu a občas zajít také nad její rámec.

Knihu sice napsali matematici, ale ani jeden není odborníkem v oblasti matematické logiky. Leč jsou lidmi s hlubokým zájmem o logické otázky, zejména o Gödelovu práci a její důsledky. Proto jsme se snažili náš handicap přeměnit do určité míry na svoji výhodu. Předně jsme nebyli tolik „sešňování“ současnou terminologií a mohli ji lépe přizpůsobit původnímu textu, což byl koneckonců jeden z našich záměrů. Dále to umožnilo používat bez problémů originální „historickou“ Gödelovu symboliku. Překlady *vět – teorémů* se staly věrohodnější. Ačkoliv jsme se snažili být co nejpřesnější, mohli jsme si dopřát také formulace, které by se specialista asi zdráhal napsat. Ujišťujeme ovšem čtenáře, že jsme se přitom bedlivě vyhýbali jakýmkoliv možným zkreslením, která by snad mohla mít vliv na přesnost. Zadruhé tím, že se můžeme svobodomyslněji vyjadřovat, se stal text v podstatě soběstačným. Všechno potřebné je v něm nyní obsaženo (snad až na několik podstatnějších výjimek z teorie množin, na které bude vždy odkázáno vhodnou dostupnou literaturou).

Motto knížky vypovídá ještě o jedné skutečnosti. Většina matematiků zná Gödelovy výsledky a nějak jim rozumí. Ovšem jak je vlastně chápou? Mnohý určitě zná jejich obsah. Ze zkušenosti ale víme, že právě tak, jak zní, jim též mohou porozumět. Je to sice dost, ale nikoli natolik, aby porozuměli metodám a argumentaci, které vedou k jejich nezpochybnitelnosti. A jsme zase u našeho motta. Teď sice známe, avšak pořád vlastně nerozumíme. Kniha může být proto snad zajímavá také pro specializovaného matematika-nelogika, aby se přinejmenším poohlédl po době a myšlenkách, které nakonec vedly k autorovým převratným objevům a jejich úplnému akceptování celou matematickou komunitou.

Gödel ve svém článku některá fakta a myšlenky mnohokrát opakuje. Můžeme vás ale ujistit, že autor dobře ví, co dělá. Činí tak zejména v těch případech, kdy si je vědom toho, že se jejich plný význam a smysl vyjeví až později, příp. až na samém konci článku. Je jasné, že se to musí částečně týkat rovněž této knížky. My to v ní děláme občas podobně a nejen proto, abychom ji přiblížili originálu. Činíme tak především v těch několika výjimkách, kde se musíme odvolávat na literaturu. Jsou to však téměř vždy záležitosti natolik triviální, že obvykle postačí, abychom se na danou věc podívali z různých úhlů a ta pak bude jasná. Alespoň pokud máme elementární znalosti z teorie množin. Koneckonců opakování nikdy nezaškodí.

Doufáme, že kniha neobsahuje příliš mnoho hrubých faktických chyb, nedopatření a překlepů, ačkoliv je naprosto zřejmé, že jistě existují. Všechny je nutno přičíst jenom na účet autorů, protože Gödelův článek je **zcela bezchybný**. Vycházeli jsme z paralelního anglického překladu německého originálu, jak je uveden v sebraných spisech [15]. Drobná přehlédnutí, která se vyskytují v tomto překladu, originál neobsahuje. Nečiníme si nárok být neomylními arbitry, přesto

se však domníváme, že **je to vsutku pravda**. Porovnáním originálu s překladem jsme se snažili všechna tato přehlédnutí odstranit a snad se to i podařilo.

Rozhodně nemůžeme čtenáři slíbit knížku jednoduchou, natož dokonce bezchybnou. V souvislosti s autorovými výsledky to pravděpodobně není ani v lidských silách. Snad ale bude pro někoho alespoň trochu zajímavá a možná i poučná. Těžko bychom si mohli přát víc.

Ačkoli jsme knihu již víceméně charakterizovali, dodejme ještě následující poznámky. Kniha má dva relativně samostatné oddíly. Musíme bohužel říci, že původní článek vsutku není příliš čitelný ani pro odborníka. **První oddíl** je proto určen tomu, kdo si hodlá v podstatě přečíst originál, avšak s menším úsilím. A třeba jej nemá ani k dispozici. Výklad se totiž snaží pokud možno důsledně respektovat původní terminologii, notaci i styl formulací jednotlivých výsledků a jejich důkazů. Je ovšem na mnoha místech doplněn a tam, kde to bylo možné, jsou důkazy **mnohem podrobnější**.

Kratší **druhý oddíl** neměl být původně vůbec napsán. Jenže jak šel čas, objevovala se nová fakta a další otázky. Velmi zhruba jej možno vymezit asi tak, že byl psán pro ty, kteří se chtějí dozvědět o vybraných pojmech teoretické i „praktické“ kybernetiky a jejich souvislostech s některými Gödelovými pojmy a myšlenkami. Všechny ukázky jsou tady provedeny výhradně v programu *MATHEMATICA*. Důvodem je jeho mimořádná univerzálnost, pružnost a nesmírně bohatá škála přídatných modulů, o níž se domníváme, že je dosti ojedinelá. Autoři jej propagují nejen ve své pedagogické, ale také odborné činnosti. Do tohoto oddílu je zahrnut rovněž Gödelův stručný medailon. Nenahrazuje v žádném případě biografické pojednání, ale slouží spíše pro zpestření jinak dosti strohého textu. Mnoho zajímavých skutečností z Gödelova života, které tam zahrnuty nejsou, lze najít (mimo jiné) např. v publikacích [17, 25, 28]. Věnovali jsme se zde aspoň informativně taktéž některým otázkám fyzikálních limitů výpočetních možností reálných počítačů a s tím souvisejících „počítačových“ důkazů, *Turingovým strojem*, *Eukleidovým Základům* nebo některým důsledkům *axiomu výběru*.

Na závěr uvedeme pár technických poznámek. *Tučnou kurzívou* budeme zdůrazňovat **první výskyt** každého pojmu, který je pro náš text důležitý. A to i přesto, že občas musíme odložit jeho definici nebo přesnější vysvětlení až na pozdější dobu. Někdy zdůrazňujeme také pojmy víceméně podružné. Děláme to pouze tehdy, když se snažíme dokreslit situaci. *Tučnou kurzívou* používáme rovněž při opakovaném výskytu, pokud je zdůrazněný termín v úvahách zásadní. Podstatná fakta nebo souvislosti, která **nemají** v textu **terminologický význam**, zdůrazňujeme **běžným tučným písmem**. Toto zvýrazňování ovšem nepoužíváme zcela důsledně. Znakem ■ označujeme konec důkazu či demonstrace teorému. Symbol □ znamená buď konec samostatné části důkazu, nebo konec části textu, v němž dokazujeme pomocnou skutečnost, kterou neformulujeme jako tvrzení, nicméně je důležitá. Již zmíněné potíže s terminologií asi nemáme šanci překonat, a tudíž jsme je ani za každou cenu nepřekonávali. Tak třeba, ačkoliv je zřejmé, že době vzniku originálu by patrně lépe odpovídala adjektiva jednomístná, dvojímístná, trojmístná, čtyřmístná nebo  $n$ -místná, Gödel je prakticky nepoužívá. Proto alternativně píšeme dnes standardní termíny unární, binární, ternární, kvaternární či  $n$ -ární.

Kniha je určena všem, kteří chtějí porozumět tomu, co víc jak před třemi čtvrtinami století napsal pravděpodobně jeden z největších duchů v historii čehokoliv!

Ve Zlíně 14. dubna 2009

Autoři

**P.S.** Někdy se uchylujeme k tvrzením, která **nemusejí být nutně zcela pravdivá**. Důvodem může být jednak naše neznalost, jednak občas také naše znalost. V druhém případě to činíme zejména tehdy, když se snažíme dodržet původní záměr knihy, tzn. dáváme přednost spíše autentičnosti před současným stavem matematické logiky. V ojedinělých případech však nic aktuálnějšího neznáme. To je bohužel naším údělem, na němž můžeme sotva něco změnit.

Maximálně jsme se snažili vyhovět všem připomínkám recenzentů, je nám ale jasné, že nebylo v našich možnostech vytvořit dokonalý text o něčem tak závažném, jako jsou právě Gödelovy převratné objevy.

## DĚKUJEME

recenzentům, že měli dostatek odvahy a trpělivosti přečíst si náš rukopis. Byli jimi pánové Ing. Aleš Gottvald, CSc., Mgr. Aleš Mráček, Ph.D. a RNDr. Aleš Raidl, Ph.D. Všichni se zasloužili o to, že text neobsahuje (snad) mnoho chyb. Avšak hlavně na mnoha místech rukopis skutečně zrevidovali a tedy pozitivně ovlivnili. Všem patří náš upřímný dík.