Vážení zákazníci,

dovolujeme si Vás upozornit, že na tuto ukázku knihy se vztahují autorská práva, tzv. copyright.

To znamená, že ukázka má sloužit výhradně pro osobní potřebu potenciálního kupujícího (aby čtenář viděl, jakým způsobem je titul zpracován a mohl se také podle tohoto, jako jednoho z parametrů, rozhodnout, zda titul koupí či ne).

Z toho vyplývá, že není dovoleno tuto ukázku jakýmkoliv způsobem dále šířit, veřejně či neveřejně např. umisťováním na datová média, na jiné internetové stránky (ani prostřednictvím odkazů) apod.

redakce nakladatelství BEN – technická literatura
redakce@ben.cz

3

FRAKTÁLY A FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE

kap. 3

Teorie chaosu a s ní související fraktální geometrie jsou relativně mladé vědní obory. K jejich vzniku významně přispěly počítače. Rozvíjejí se od šedesátých let dvacátého století. U základů obou disciplín nesporně stál Benoit B. Mandelbrot, který jako první matematicky definoval pojem fraktálu. Fraktál lze charakterizovat jako nekonečně členitý útvar. Pojem fraktálu je odvozen z latinského slova *fractus*, které značí zlomený, rozbitý. K vysvětlení tohoto pojmu je nutné nejdříve charakterizovat pojem geometricky hladkého útvaru.

3.1 Geometricky hladký útvar

Běžná tělesa a především umělé útvary v našem okolí se dají popsat nebo zobrazit jako jistý konečný počet parametrů, které tato tělesa z hlediska jejich tvaru plně charakterizují. Pro základní geometrické tvary (např. krychle, válec, koule, přímka atd.) známe vzorce a vztahy, díky nimž můžeme vypočítat například délku, plochu či objem. Samozřejmě, že výsledek je vždy stejný, i když počítáme v různých jednotkách. Tyto údaje můžeme zjistit i u složitějších těles (například délka Bézierovy křivky, atd.) Výsledky jsou opět nezávislé na zvoleném měřítku. Úsečka, přímka nebo křivka má dimenzi rovnu 1. To znamená, že je jednorozměrná – polohu bodu na ní lze určit jedním číslem (souřadnicí).

Fakt, že má křivka dimenzi rovnu 1, neznamená, že je zobrazována v jednorozměrném prostoru. Dimenze udává jen počet parametrů nutných k určení pozice bodu na křivce. Jakákoliv hladká plocha (např. trojúhelník, n-úhelník atd.) má dimenzi rovnu 2. To znamená, že polohu bodu je třeba určit dvěma parametry. Plochy mají určitý obsah, ale nulový objem, protože jejich tloušťka je nulová. Krychle, koule, jehlan nebo celý běžný prostor kolem nás mají dimenzi rovnu 3, protože poloha bodu v nich je jednoznačně určena třemi parametry. Všechny uvedené útvary mají jednu společnou vlastnost. Každému z nich totiž můžeme přiřadit jisté celé číslo, které nazýváme *počet rozměrů* nebo také (topologická) *dimenze* daného útvaru. Všechny výše zmíněné útvary i tělesa jsou charakteristické ale především tím, že jsou geometricky hladké – přesně vzato, nejsou fraktální povahy. Tím je míněna skutečnost, že jejich tvar je „jednoduchý" – vnitřek ani hranice nejsou výrazně, nebo dokonce nekonečně členité, jak je tomu u všech objektů, zmíněných v předchozí kapitole.

3.2 Nekonečně členitý útvar

Pro běžné objekty vystačíme s dimenzemi 0, 1, 2, 3 (nebo jiným přirozeným číslem). Bylo proto poměrně velkým překvapením, když byly objeveny geometrické útvary, pro které s těmito dimenzemi nevystačíme. Některé z těchto útvarů nejsou jen abstraktní objekty, jež jsou výplodem fantazie matematiků, ale často mají své vzory v přírodě. Příklady mohou být břehy toků, pobřeží ostrovů nebo povrchy planet.

Uvedený příklad se reálně vyskytl při měření pobřeží Bretaně. L. F. Richardson jako první zjistil, že tato délka je závislá na délce měřidla, kterým bylo pobřeží odkrokováno (na mapě ovšem může mít jeden krok měřítko jak v metrech, tak např. v kilometrech). Richardson také následně určil empirický vztah $K = C\varepsilon^D$ kde $\varepsilon > 0$ je délka měřidla – „kroku", C je konstanta úměrnosti a $K = K(\varepsilon) = N(\varepsilon)$. ε je celková délka aproximace pobřeží, kde $N(\varepsilon)$ nutný počet kroků. Délka aproximace se ukázala být závislá na konstantě D, jejíž význam si Richardson nedokázal vysvětlit. Až Benoit Mandelbrot dokázal souvislost mezi touto konstantou a tzv. Hausdorffovou-Besicovicovou dimenzí. Hodnoty této dimenze tvoří nejdůležitější strukturální konstanty útvarů, které nejsou geometricky hladké. Tyto nekonečně členité útvary mají většinou fraktální strukturu.

3.3 Hausdorffova-Besicovicova dimenze

Pro mnohé útvary, vyskytující se v okolním světě, stačí uvazovat dimenze 0, 1, 2 nebo 3. Nicméně byly objeveny zvláštní geometrické útvary, pro které toto rozdělení podle celočíselných dimenzí nestačí. Tyto útvary nevznikají jen ve fantazii matematiků či umělců, ale často tvoří reálné přírodní objekty.

Měřením délky geometricky hladké křivky, která má topologickou dimenzi rovnu jedné, dostaneme při pohledu v různých měřítkách vždy stejné konečné číslo. Měřením délky pobřeží (což je opět křivka s topologickou dimenzí rovnou jedné) se při zmenšování měřítka toto číslo postupně stává nekonečně velkým. Pobřeží tedy v rovině zabírá více místa než hladká křivka. Nezabírá však všechno místo (přesněji řečeno, nevyplňuje celou rovinu). Jeho „skutečná“ dimenze je tedy větší než topologická dimenze křivky (ta je rovna jedné) a současně je menší než topologická dimenze roviny (ta je rovna dvěma). Z toho jasně vyplývá, že dimenze takového útvaru není celočíselná. Toto necelé číslo se obecně nazývá *fraktální dimenzí.*

Objekty popisované fraktální geometrií lze proto charakterizovat jako objekty s neceločíselnou dimenzí (až na některé teoretické výjimky). Dimenze fraktálních objektů se také nazývá Hausdorffova-Besicovicova dimenze. Hodnota této dimenze (resp. rozdíl mezi fraktální dimenzí a dimenzí topologickou) potom udává úroveň členitosti daného objektu. Hodnota dimenze také udává, s jakou rychlostí délka těchto útvarů roste do nekonečna (či odpovídající veličina při větším počtu rozměrů, tj. povrch v euklidovském prostoru R^3 či objem v prostoru R^4 atd.). Jestliže se bude fraktální dimenze od topologické lišit velmi málo, bude takový objekt méně členitý. Bude-li fraktální dimenze značně větší než dimenze topologická, bude objekt naopak velmi členitý.

Rozdíly mezi topologickou a fraktální dimenzí využívá i definice fraktálů. Tuto definici formuloval matematik Benoit B. Mandelbrot takto: *fraktál je množina či geometrický útvar, jehož Hausdorffova-Besicovicova dimenze je (ostře) větší než dimenze topologická.* V souladu s tím je možno vymezit pojem fraktálu i jako akronym z anglického *<u>fract</u>ion<u>al</u> dimension* = zlomková dimenze.

3.3.1 Výpočet fraktální dimenze

Matematicky je možno popsat míru „strukturovanosti“ útvarů metrickými dimenzemi. Jsou to čísla charakterizující fraktály. Míru nepravidelnosti útvaru lze nejlépe popsat Hausdorfovou – Besicovicovou (fraktální) dimenzí. Pro fraktální objekty je číselná hodnota této dimenze větší než hodnota dimenze topologické. Nefraktální objekty mají tu vlastnost, že zmenšováním délky měřítka se přibližuje délka objektu (obvod) k nějaké limitní hodnotě. U fraktálů to neplatí, délka se neustále zvětšuje. Tato vlastnost se nazývá *Richardsonův efekt*.

Existuje několik definic dimenzí, které lze v principu rozdělit na dvě skupiny:

- metrické dimenze, závislé na metrických vlastnostech,
- informační dimenze, závislé na pravděpodobnostních vlastnostech.

Příkladem ze skupiny metrických dimenzí je tzv. Hausdorffova-Besicovicova dimenze, také nazývána Kolmogorovova dimenze, nebo též kapacita, příp. fraktální dimenze. Je vyjádřena následujícím vztahem:

$$d_k = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \tag{40}$$

kde $N(\varepsilon)$ je minimální počet elementárních útvarů (např. v R^2 čtverců se stranou ε) potřebných k pokrytí uvažované množiny. Tato dimenze kvantitativně odráží míru složitosti („strukturovanost“) dané množiny. Ze vztahu (40) je vidět, že hodnota fraktální dimenze nezávisí na základu použitého logaritmu.

Třída informačních dimenzí nachází velmi často uplatnění v dynamických systémech, protože jsou vhodné k popisu časového vývoje systémů. Tento vývoj má obvykle stochastický charakter, a proto se také hovoří o dimenzích, závislých na pravděpodobnostních vlastnostech. Příkladem jsou třeba Ljapunovova, příp. Hausdorffova dimenze. Dále se jimi nebudeme zabývat.

3.3.1.1 Úsečka

Nejjednodušším příkladem výpočtu Hausdorfovy-Besicovicovy dimenze je úsečka jednotkové délky. Rozdělme tuto úsečku na N dílů. Toto rozdělení odpovídá tomu, jako bychom se na úsečku podívali s N-násobným zvětšením. Měřítko nové úsečky je tedy:

$$\varepsilon = 1/N, \tag{41}$$

kde ε značí měřítko a N je počet dílů, na které se útvar (v našem případě úsečka) rozdělí. Pro Hausdorffovu-Besicovicovu dimenzi D obecně platí, podle Richardsonova empirického vztahu, následující podmínka:

$$N\varepsilon^D = 1.$$

Z toho vyplývá, že dimenze D se pro dané dělení N a dané měřítko ε vypočítá následujícími úpravami:

$$\begin{aligned}
&N\varepsilon^D = 1,\\
&\log\ N\varepsilon^D = \log\ 1,\\
&\log\ N + \log\ \varepsilon^D = 0,\\
&\log\ N + D\ \log\ \varepsilon = 0,\\
&D\ \log\ \varepsilon = -\log\ N,\\
&D = (-\log\ N)/\log\ \varepsilon,\\
&D = \log\ N/\log\ (1/\varepsilon).
\end{aligned} \tag{42}$$

Po dosazení (41) do poslední rovnice (42) získáme následující výsledek:

$$D = \log N/\log(1/\varepsilon) = \log N/\log N = 1.$$

Topologická dimenze úsečky, jak je známo z euklidovské geometrie, je rovna jedné, stejně jako vypočtená Hausdorffova-Besicovicova dimenze. Z výše uvedené definice fraktálu tedy vyplývá, že úsečka není fraktálem (pro fraktál musí být fraktální dimenze ostře větší než dimenze topologická).

3.3.1.2 Čtverec

Dalším triviálním útvarem je čtverec se stranou jednotkové délky (jeho plocha je rovněž jednotková). Po dvojnásobném zvětšení čtverec vypadá tak, jako by měl čtyřnásobnou plochu. Měřítko se tedy musí změnit podle tohoto vztahu:

$$\varepsilon = 1/N^{1/2}.$$

Hausdorffova-Besicovicova dimenze čtverce pak je:

$$D = \log N/\log(1/\varepsilon) = \log N/\log\ N^{1/2} = 1/(1/2) = 2.$$

Topologická dimenze čtverce je rovna dvěma, neboť se jedná o hladký plošný útvar euklidovské geometrie. Fraktální dimenze čtverce je taktéž rovna dvěma, podle výše uvedené definice proto čtverec opět není fraktálem.

3.3.1.3 Krychle

Pro vyšší dimenze vypadá výpočet obdobně, jako např. pro jednotkovou krychli v prostoru R^3. S rozdělením krychle na díly se výsledné krychličky zmenší proporcionálně třetí odmocnině N. Měřítko se poté vypočítá ze vztahu:

$$\varepsilon = 1/N^{1/3}.$$

Fraktální dimenzi krychle je možné vyjádřit následovně:

$$D = \log N/\log(1/\varepsilon) = \log N/\log\ N^{1/3} = 1/(1/3) = 3.$$

Topologická dimenze krychle je rovna třem, neboť se jedná o hladký útvar v prostoru R^3. Fraktální dimenze krychle je taktéž rovna třem, krychle tedy, podobně jako úsečka a čtverec, také není fraktálem.

3.3.1.4 Zobecnění výpočtu fraktální dimenze

Na základě uvedených jednoduchých jednotkových útvarů umíme zobecnit postup výpočtu fraktální dimenze. Pro měřítko e „pokrývacích" útvarů, je možné napsat obecný výraz

$$\varepsilon = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}}, \qquad \textbf{(43)}$$

kde D je fraktální dimenze objektu. Vyjádříme-li D, získáme:

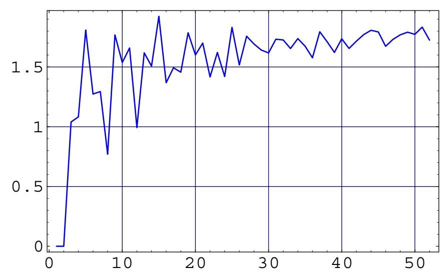
$$\log \varepsilon = -\log N^{\frac{1}{D}}, \qquad \textbf{(44)}$$

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

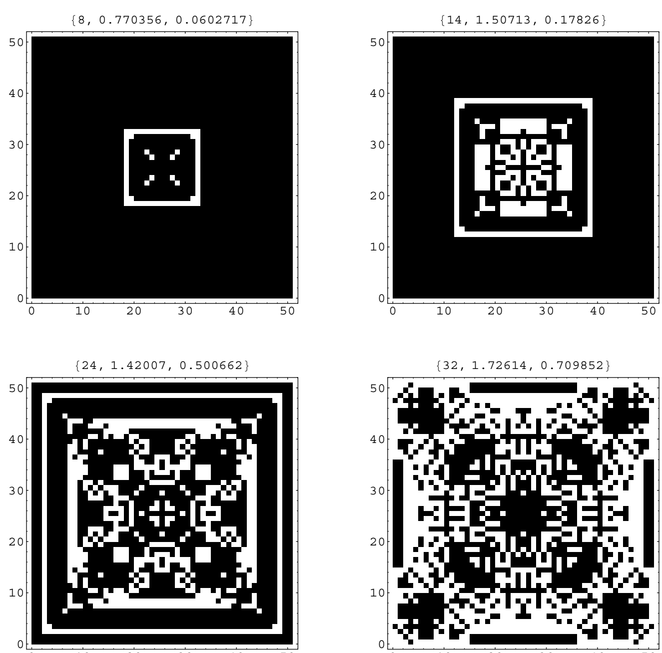
kde N označuje faktor změny délky, resp. počet pokrývacích útvarů, a 1/e faktor změny měřítka.

Poznamenejme, že vztah (44) lze ovšem použít pouze u fraktálů soběpodobných, zatímco u obecnějších fraktálů soběpříbuzných je třeba použít vztahu (40), neboť nelze ignorovat limitu $\varepsilon \to 0$. Oba vztahy určují dimenzi tak, že přímka je dělena na malé úsečky, plocha na čtverečky a prostor na krychličky. Někdy se proto hovoří o tzv. krabicových dimenzích.

Fraktální dimenze nemusí sloužit jen k charakterizaci statické „fraktální" vlastnosti objektu, ale rovněž k zachycení, řekněme, dynamiky vývoje objektu či chování systému [2]. Na *obr. 110* je zobrazena krabicová fraktální dimenze v závislosti na iteračním vývoji buněčného automatu. Její průběh je dán různorodostí jednotlivých fází vývoje automatu, které, jak je z *obr. 110* vidět, konvergují k ustálenému stavu. Praktičtější pokusy o aplikaci fraktální dimenze v dynamických systémech lze najít v [13], kde byla použita na popis a studium průmyslových procesů ve sklářství a v [2], kde byla použita na studium tryskového motoru.



Obr. 110 *Krabicová dimenze, zachycující vývoj buněčného automatu.*



Obr. 111 *Čtyři fáze vývoje buněčného automatu.*

3.3.1.5 Cantorovo diskontinuum

Vznik této množiny byl popsán v odstavci 1.1. Je spojena se jménem Georga Cantora, který zasáhl do vývoje matematiky více, než kdokoliv jiný. Vzniká opakovaným vynecháváním prostřední třetiny ze všech intervalů, které zbyly z předchozích iterací. Po první iteraci zůstanou $N = 2$ úsečky s měřítkem $\varepsilon = 1/3$, atd. Obecně při trojnásobném zjemnění se počet úseček, tvořících následující iteraci, zdvojnásobí. Fraktální dimenze je tudíž podle (44)

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 \ . \tag{45}$$

Cantorova množina se sice skládá z nekonečně mnoha bodů, ale neobsahuje žádnou úsečku, proto je její topologická dimenze 0. Její fraktální dimenze je nicméně kladná a podle definice je tato množina fraktálem.

3.3.1.6 Kochova křivka

Aplikujme postup výpočtu fraktální dimenze na nejjednodušší fraktál na ploše – Kochovu křivku (*obr. 10*). Při každé iteraci se délka každé hrany zmenší na 1/3 (= ε) své původní hodnoty a počet soběpodobných úseků vzroste na $N = 4$.

Při trojnásobném zjemnění se tedy délka křivky zvětší čtyřikrát, a proto Hausdorffova-Besicovicova dimenze není celé číslo. Pro $N = 4$ se tedy měřítko musí zmenšit na třetinu, do vzorce (44) je proto třeba dosadit tyto hodnoty:

$$\varepsilon = 1/3,$$
$$N = 4.$$

Fraktální dimenze Kochovy křivky je pak

$$D = \log N / \log(1/\varepsilon) = \log 4 / \log 3 = 1.2618595.$$

Topologická dimenze této křivky je rovna jedné, fraktální dimenze je však větší. Z toho vyplývá, že tato křivka je fraktálem. Má i další zajímavé matematické a geometrické vlastnosti: i když je v celém svém rozsahu spojitá, v žádném bodě nemá konečnou derivaci. Každý bod na křivce je totiž po nekonečně mnoha iteracích průnikem dvou „nekonečně malých“ úseček, které tvoří strany trojúhelníka, který je taktéž „nekonečně malý“. Je nekonečně dlouhá, i když zabírá jen omezenou část plochy, jak je ostatně patrné z obr. 10.

3.3.1.7 Sierpinského trojúhelník

Tento fraktální útvar je v knize zobrazen několikrát, viz např. *obr. 6*. Vzniká z rovnoramenného (příp. rovnostranného) trojúhelníku vynecháním prostředního ze čtyř stejných trojúhelníků, které jej dělí. Stejnou proceduru aplikujeme na zbylé tři trojúhelníky (a tak stále dokola). V první iteraci získáme $N = 3$ pokrývacích útvarů s měřítkem $\varepsilon = {}^1/_2$. Ve druhé iteraci získáváme $N = 3 \times 3 = 9$ útvarů s měřítkem $\varepsilon = {}^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$. Obecně v n-té iteraci

$$N = 3^n \quad \text{a} \quad \varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ . \tag{46}$$

Fraktální dimenze je pak

$$D=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 3^n}{\log 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\log 3}{n\log 2}=\frac{\log 3}{\log 2}=1.5850\ . \qquad (47)$$

Sierpinského trojúhelník obsahuje zřejmě úsečky, avšak neobsahuje sebemenší souvislou část plochy; jeho topologická dimenze je proto 1. Podle definice jde o fraktál. Povšimněme si, že jeho fraktální dimenze je větší, než u Kochovy křivky, což se konec konců dalo očekávat. Proto v jistém smyslu vyplňuje plochu lépe (přesně vzato, ve fraktálním smyslu).

3.3.1.8 Hausdorffova-Besicovicova dimenze vybraných přírodních útvarů

V následující tabulce jsou uvedeny odhady fraktálních dimenzí některých přírodních útvarů [16]:

Přírodní objekt	Odhad fraktální dimenze
Pobřeží	1.26
Povrch mozku člověka	2.76
Povrch neerodovaných skal	2.2÷2.3
Obvod 2D - průmětu oblaku	1.33

V souvislosti s tabulkou je dobré si uvědomit několik věcí. Uvažujme jeden z objektů – neerodovanou skálu. Musíme přísně oddělit její povrch od skály jako tělesa. Na první pohled by se zdálo, že toto rozlišení v sobě neskrývá žádné problémy. Povrch má topologickou dimenzi plochy, která je menší než dimenze fraktální, a proto je fraktálem podle Mandelbrotovy definice. Jelikož i ve vyšších dimenzích platí analogie Richardsonova efektu, můžeme obsah povrchu považovat za nekonečný, i když zaujímá omezenou část prostoru. Z druhé strany těleso skály má topologickou dimenzi rovnu 3 a jistě konečný objem. Kromě toho není těžké ze vzorce (40) dokázat, že pro libovolnou podmnožinu $M \in R^n$ je její fraktální dimenze $D_M \le n$. Pro skálu mají tedy obě dimenze stejnou hodnotu 3. Takže těleso skály není fraktálem, ačkoliv by to mnohé mohlo svádět k opačné představě. Tento fakt konečně potvrzuje obecnou filozofii fraktální geometrie: fraktál je takový útvar, který svou členitostí vyplňuje v jistém prostoru „více místa“, než nefraktální objekt téže topologické dimenze. Skála, jako těleso v běžném trojrozměrném prostoru, ovšem nemůže zabrat nic víc než jen jeho jistou část.

Obecně dokonce platí, že v euklidovském prostoru R^n lze zkonstruovat fraktál libovolné Hausdorffovy-Besicovicovy dimenze, nepřevyšující n. Označíme-li celou část reálného čísla $\lfloor\bullet\rfloor$, Ind M a Dim M topologickou, resp. fraktální dimenzi množiny M, pak platí následující věta s poměrně triviálním důkazem:

V prostoru R^n, $n \ge 1$, existuje ke každému $D \in (0,n]$ soběpodobný fraktál $\varnothing \ne F \subseteq R^n$ takový, že Dim F = D a Ind F = $\lfloor$Dim F$\rfloor$, pokud není Dim F celočíselná, jinak Ind F = Dim F – 1.

Tvrzení obsahuje několik cenných informací. Předně v euklidovském prostoru lze pro libovolnou hodnotu fraktální dimenze z intervalu $(0,n]$ zkonstruovat příslušný fraktál, a protože je soběpodobný, lze tak učinit nejjednodušším možným způsobem. Navíc tedy existují i útvary s celočíselnou fraktální dimenzí, ovšem jejich topologická dimenze je o jedničku menší.

3.4 Soběpodobnost

Při popisování fraktálních útvarů se často používá vlastnost *soběpodobnosti*. Soběpodobnost (v matematice se také nazývá invariance vzhledem ke změně měřítka) je taková vlastnost, kdy objekt (nebo jeho část), vypadá podobně při pohledu v různém zvětšení. Soběpodobnost je jedním z hlavních znaků fraktálních útvarů.

Mandelbrotův pojem soběpodobnosti matematizoval Hutchinson, který vycházel z toho, že soběpodobné množiny jsou geometricky podobné celku, zmenšenému v jistém poměru. Definoval soběpodobnou podmnožinu W n-rozměrného euklidovského prostoru R^n tak, že existuje konečně mnoho kontraktivních, příp. i afinních zobrazení

$$w_1, w_2, \ldots, w_m : R^n \to R^n \tag{48}$$

takových, že platí

$$W = \bigcup_{i=1}^{m} w_i(W) \ , \tag{49}$$

přičemž pro libovolná $i \neq j$ obsahuje průnik

$$w_i(W) \cap w_j(W) \tag{50}$$

jen konečný počet prvků (nebo je prázdný). Na potenci R^n je zobrazeními (48) definován operátor

$$\mathbf{w}(X) = \bigcup_{i=1}^{m} w_i(X) \ , \ X \subseteq R^n \ , \tag{51}$$

který se nazývá Hutchinsonův operátor. Podle (49) je soběpodobná množina W pevným bodem příslušného Hutchinsonova operátoru. Tato množina se také nazývá atraktor operátoru **w** a musí mít nutně fraktální strukturu (mimo zcela triviálních případů).

Množina definovaná vztahem (49) má několik velmi zajímavých vlastností, které jsou typické pro většinu (alespoň uměle vytvořených) fraktálních objektů:

- soběpodobná množina vzniká opakováním sebe sama při určité transformaci; transformací v tomto kontextu rozumíme například rotaci, posunutí či zkosení; všechny tyto transformace jsou definovány v prostoru R^n afinními transformacemi,
- soběpodobné množiny jsou invariantní vzhledem ke změně měřítka: při libovolném zvětšení, či zmenšení vypadají stejně,
- soběpodobná množina vzniká sama ze sebe, resp. vzniká opakováním téhož základního motivu.

Mandelbrotova definice fraktálu je sice univerzálně platná, ale skrývá v sobě nejedno úskalí. Předně různé části fraktálu mohou mít různou fraktální dimenzi; výsledná fraktální dimenze je jejich supremem. Navíc Hutchinsonova definice soběpodobnosti je velmi přísná a popisuje jen malou třídu fraktálů, pro něž lze počítat fraktální dimenzi podle (44). U mnohých fraktálů tento vztah použít nelze, i přesto, že jejich fraktální dimenzi lze počítat podle (40). *Obr. 96* ukazuje množiny, které nejsou soběpodobné v Hutchinsonově smyslu – někdy se jim též říká Apolloniovy sítě. Aniž bychom rozpitvávali fraktály matematicky, je jasné, že pro naše účely bude nejvhodnější popsat je nematematicky jejich charakteristickými vlastnostmi:

- mají detaily na každé úrovni,
- jsou (přesně, přibližně, statisticky) soběpodobné,
- jejich fraktální dimenze je (ostře) větší než topologická dimenze,
- někdy jsou popsatelné pomocí jednoduchých algoritmů.

Rozlišujeme dva druhy soběpodobnosti:

- *přesná,*
- *statistická.*

Přesná soběpodobnost – definovaná prostřednictvím soběpodobné množiny, která je určena vztahem (49) a pro kterou existuje konečné množství kontrahujících zobrazení takových, že tuto množinu tvoří sjednocení všech disjunktních částí kontrahované množiny.

Přesně soběpodobná množina vzniká opakováním seba sama pomocí určitých (afinních) transformací – především změnou měřítka, rotací, posunutím. Soběpodobné množiny jsou invariantní vůči změnám měřítka, tj. při libovolném zvětšení nebo zmenšení vypadají vždy stejně. Každá taková množina vzniká opakováním stejného motivu a proto jsou její části vzájemně podobné.

Statistická soběpodobnost – vychází ze skutečnosti, že všechny přesně soběpodobné fraktály jsou *pravidelné*. Je to dáno tím, že jejich způsob generování je přísně *deterministický*. V přírodě se ale pravidelné fraktály nevyskytují. Když chceme dosáhnout toho, aby fraktál korespondoval s realitou, musíme do procesu generování zahrnout *náhodu.* Způsob, jakým se nahodilost podílí na generování fraktálu, vždy určuje jeho tvar a fraktální dimenzi.

Zhruba si to můžeme představovat tak, že množina W je statisticky soběpodobná, když je sjednocením konečného počtu nepřekrývajících se transformovaných kopií sebe sama podle vztahu (49) a každá z kopií $w_i(W)$ má stejné statistické charakteristiky, jako množina W. Hovoříme, že $w_i(W)$ a W jsou statisticky nerozlišitelné. Z popisu fraktálu plyne, že je soběpodobný vzhledem k jistým transformacím. Statistická soběpodobnost pak znamená, že vzhledem k těmto transformacím jsou soběpodobné určité statistické charakteristiky. Obvykle se v praxi za zachování podmínek považuje shoda odhadů střední hodnoty a směrodatné odchylky.

Soběpodobnost a její statistická verze tvoří dva protipóly celé škály dalších eventualit. Na jednom pólu jsou soběpodobné fraktály, generované jednoduchými deterministickými procedurami, jako např. Cantorovo diskontinuum, Sierpinského trojúhelník, Kochova křivka, sněhová vločka či jejich různé nestochastické variace. Na druhém pólu stojí zcela nahodilé struktury. Příkladem je třeba trajektorie Brownova pohybu, která je spojitou křivkou a má stále fraktální dimenzi 2, ať se nachází v rovině či prostoru.

Mezi těmito eventualitami jsou ovšem další možnosti, např. Juliovy množiny či množina Mandelbrotova. Nejsou soběpodobné, neboť netvoří atraktor žádného Hutchinsonova operátoru. Jsou však generovány deterministickými algoritmy, v nichž náhoda nehraje žádnou roli, takže neleží ani na jednom ze zmíněných pólů. Mezi takovými množinami a statisticky soběpodobnými fraktály je často sotva patrná hranice. Proto jsou souhrnně nazývány jako fraktály *soběpříbuzné*.