

# Vážení zákazníci,

dovolujeme si Vás upozornit, že na tuto ukázkou knihy se vztahují autorská práva, tzv. copyright.

To znamená, že ukáзка má sloužit výhradně pro osobní potřebu potenciálního kupujícího (aby čtenář viděl, jakým způsobem je titul zpracován a mohl se také podle tohoto, jako jednoho z parametrů, rozhodnout, zda titul koupí či ne).

Z toho vyplývá, že není dovoleno tuto ukázkou jakýmkoliv způsobem dále šířit, veřejně či neveřejně např. umístováním na datová média, na jiné internetové stránky (ani prostřednictvím odkazů) apod.

*redakce nakladatelství BEN – technická literatura*  
[redakce@ben.cz](mailto:redakce@ben.cz)



regresní funkce, ale k nalezení samotné regresní funkce (včetně jejich parametrů), jenž má „fitovat“ příslušná data. Tento algoritmus byl s úspěchem použit na identifikaci struktury systému na základě naměřené přechodové charakteristiky, na návrh poměrně složitých elektronických obvodů atd. Z jeho samotné podstaty plyne, že by byl ideální při identifikaci a modelování komplexních systémů u nichž je, jak už bylo jednou řečeno, matematicko-fyzikální analýza obtížná.

4. Synergetika. Tento interdisciplinární obor, je složen z teorií jako je teorie katastrof [46]–[50], teorie chaosu [51]–[58], nebo také nerovnovážné termodynamiky [59] a z toho plynoucí samoorganizace nelineárních dynamik [60]–[66] apod. s tím že má zřejmě velkou budoucnost v kybernetice a chemii jako takové. Již dnes existuje tzv. řízení chaosu, kde se využívá teorie chaosu a teorie katastrof pro řízení speciální třídy systémů nebo k návrhu řízení, které se takovým režimům má vyhnout. Její potenciál leží rovněž v biochemických technologiích, kde se rýsuje možnost syntetizace složitých biochemických materiálů (viz [59]) pomocí využití principů kybernetiky a nerovnovážné termodynamiky. Rovněž ji lze využít pro vyšetření strukturální stability či existence režimů, při nichž by daný systém vykazoval chaotické či katastrofické chování.

To co zde bylo načrtnuto, je jen zlomek potenciálu umělé inteligence, jejímž jedním z hlavních cílů je napodobení inteligentního myšlení. I když existují důkazy, podle kterých dosažení tohoto cíle zřejmě není možné, je už nyní jasné, že umělá inteligence v současném stavu je komplexně použitelný obor a má tudíž své opodstatnění.

Než dojde na popis obou klíčových algoritmů, jenž jsou alfou a omegou této publikace, je vhodné připomenout některé základní pojmy z oblasti účelových funkcí a evolučních algoritmů.

### 3 *Optimalizace a účelová funkce*

Mluví-li se o úlohách vedoucích k výpočtu extrémů funkcí (extremalizační či optimalizační metody), myslí se tím obvykle úlohy, které vznikají při praktické činnosti člověka a které vyžadují analytický či spíše častěji numerický výpočet extrémů funkcí více proměnných.

Optimalizační úlohy mají svůj původ v historii, přesněji v období antiky. V té době byly formulovány úlohy o nalezení největších či nejmenších veličin. Z historie jsou známy dnes již klasické úlohy jako je Didonina úloha (fénická královna), která podle legendy získala od krále Hiarba zemi, kterou dokázala ohraničit volí kůží. Dido ji rozřezala na tenké kousky a zhotovila řemen, kterým vyznačila půdu na níž vzniklo Kartágo. Ve středověku vznikla další úloha, tzv. úloha o brachystroně (1696), která tak dala vzniknout variačnímu počtu. Ta byla formulována v Bernouliho knize „*Problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur*“ (Nová úloha k jejímuž řešení zveme matematiky). K rozvoji optimalizační problematiky přispěl také Isaac Newton (1687) publikací „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ (Matematické základy přírodní filozofie). V ní se Newton zabývá pohybem těles v řídkém prostředí.

Impulz pro rozvoj optimalizačních metod po druhé světové válce přinesly úlohy z oblasti ekonomie, které lze shrnout pod název **problémy optimalizace**

**výrobních programů.** V typické úloze tohoto druhu se předpokládá, že podnik má technické možnosti pro výrobu  $n$  druhů výrobků a hledá výrobní program, jenž se dá matematicky zapsat jako funkce několika nezávisle proměnných  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , kde  $x$  udává úroveň výroby  $i$ -tého výrobku v daném období. Výrobní program  $x$  přináší podniku užitek velikosti  $f(x)$ , kde se o této funkci mluví jako o **účelové funkci**.

Účelová funkce může věcně představovat celkový zisk podniku při výrobním programu  $x$  nebo jiného ukazatele, závislého na tomto výrobním programu. Podnik musí při volbě výrobního programu respektovat řadu omezení. Především má omezené výrobní zdroje, jejichž celkovou spotřebu nemůže během sledovaného období překročit. Dále musí respektovat podmínky předepsané plánem a může mít i omezení v odbytu výrobků. Všechna tato omezení lze zapsat ve tvaru soustavy rovnic a nerovnosti tvaru (3.1).

$$g_j(x) \leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

nebo

$$g_j(x) = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

nebo

$$g_j(x) \geq b_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

kde  $g_j$  jsou známé funkce a  $b_j$  známé konstanty. Pro teoretické úvahy je někdy jednodušší převést konstanty  $b_j$  v (3.1) na levou stranu a zahrnout je do funkce  $g_j$ . Na pravé straně pak budou nuly. V problémech optimalizace výrobních programů není z hlediska tvorby modelu podstatné, zda se optimalizace týká podniku nebo nějakého většího ekonomického celku, jako je průmyslové odvětví nebo dokonce celé národní hospodářství. Proměnná  $x$  nemusí rovněž reprezentovat přímo úroveň výroby, ale může jít i o jiná kvantifikovaná rozhodnutí, jako je množství nakoupené suroviny, objem investic na určité období apod.

Jinou skupinou optimalizačních úloh z ekonomické oblasti jsou **dopravní problémy**. V nich jde o to, aby se navrhl plán přepravy určitého zboží z míst výroby do míst spotřeby tak, aby byla respektována disponibilní množství zboží u výrobců, požadavky spotřebitelů a popř. další podmínky. Je upřednostňován takový plán přepravy, kde jsou minimální buď celkové dopravní náklady, anebo doba, během níž je všechna přeprava uskutečněna. V **alokačních problémech** se hledá umístění výrobních středisek, skladů, zemědělské produkce apod. tak, aby celkové náklady na dopravu a kooperaci byly minimální. Často se vyšetřují také tzv. **distribuční problémy**, v nichž hledáme rozpis výroby dané struktury na různé typy strojů tak, aby pokud možno každý stroj byl využit především na takové operace, které je schopen efektivně vykonávat.

Z oblasti chemie je známou optimalizační úlohou výpočet chemické rovnováhy v plynné soustavě  $m$  druhů atomů prvků, které mohou tvořit  $n$  druhů molekul. Část atomů vstupuje do molekulárních vazeb a část se z nich opět uvolňuje, přičemž při daném tlaku a teplotě se utvoří určitý rovnovážný stav. Kolik grammolekul jednotlivých druhů molekul se v soustavě v rovnovážném stavu nachází, lze vypočítat podle zákona,

který říká, že v rovnovážném stavu je celková volná energie soustavy minimální. Označili se  $X_j$  neznámý počet grammolekul druhu  $J$  v soustavě v rovnovážném stavu ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),  $b_i$ , známý počet gramatomů prvku  $i$  v soustavě ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) a  $a_{ij}$  známý počet atomů prvku  $i$  v molekule druhu  $j$ , lze celkovou volnou energii soustavy vyjádřit jako

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j (c_j + Q + \ln \frac{x_j}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}) \quad (3.2)$$

kde  $c_j$  jsou známé (tabelované) konstanty a  $Q$  je konstanta závislá na tlaku, při němž se rovnováha směsi počítá. Extrém funkce (1.3) musíme pak počítat při podmínkách vyjadřujících zachování hmoty

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

a podmínkách nezápornosti proměnných. Na výpočtech extrémů funkcí je založena i teorie regrese. V základní úloze teorie regrese se předpokládá, že veličina  $Y$  závisí na proměnných  $Z_i$  kde  $i = 1, 2, \dots, n$ , a kde závislost je stochastické povahy. Jsou-li známy napozorované hodnoty  $y_j$  kde  $j = 1, 2, \dots, m$ , veličiny  $Y$  a jim odpovídající napozorované hodnoty  $z_{ij}$  veličin  $Z_i$  je úkolem teorie regrese odhadnout parametry  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  v jinak známém funkčním vztahu

$$Y = f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \quad (3.4)$$

tak, aby tento vztah vzhledem k napozorovaným hodnotám co nejlépe vystihl závislost veličiny  $Y$  na  $Z$ .

Parametry  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  mohou mít i určitou věcnou interpretaci a pak se často požaduje, aby splňovaly dané vedlejší podmínky, např.

$$\beta_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.5)$$

Z oblasti matematické statistiky pochází úloha určení optimálních rozsahů ve stratifikovaném náhodném výběru tak, aby byly získány odhady parametrů s předepsanou přesností a s minimálními celkovými náklady.

Řada extremalizačních úloh byla formulována pro oblast vojenství, v nichž jde zejména o různé varianty úlohy optimálního přiřazení balistických raket na vojenské cíle. V těchto úlohách bývá proměnnou  $x_{ij}$  označen počet raket typu  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) přiřazených na cíl číslo  $j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) a  $a_i$  disponibilní počet raket typu  $i$ ,  $p_i$  pravděpodobnost, že cíl  $j$  bude zničen, bude-li napaden raketou typu  $i$ , a  $v_j$  hodnotu cíle  $j$ . Pravděpodobnost zničení cíle  $j$  při určitěm přiřazení raket  $x_1, x_2, \dots, x_n$  je dána

$$1 - \prod_{i=j}^m 1 - p_{ij} \quad (3.6)$$

Celková střední hodnota cílů, zničená při přiřazení  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) které se má maximalizovat, je

$$f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}) = \sum_{j=1}^n v_j \left(1 - \prod_{i=j}^m (1 - p_{ij})^{x_{ij}}\right) \quad (3.7)$$

při vedlejších podmínkách

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \text{kde} \quad \forall x_{ij} > 0 \quad (3.8)$$

Některé úlohy z variačního počtu a z teorie optimálního řízení [67], v nichž původně jde o vyhledání extrému určitého integrálu při vedlejších podmínkách, mohou být přibližně řešeny převedením na úlohu optimalizace funkce. V teorii her se řada úloh řeší převedením na vyhledání extrému funkce; zejména problém nalézt optimální strategii v maticových a dvojmaticových hrách se převádí na lineární, popř. nelineární optimalizační úlohu.

Řada optimalizačních úloh přichází z oblasti techniky. V současné literatuře jsou popsány výpočty směřující k optimalizaci technických konstrukcí z oblasti stavebnictví, loďářství, raketové techniky, kybernetiky a dalších. Část kybernetiky se v současné době zabývá optimálním řízením lineárních či nelineárních systémů, kde optimum řešeného problému má charakter času či energie. Jinými slovy, hledá se takové řízení, které by převedlo řízený systém do požadovaného stavu v co nejkratším čase nebo s minimálními nároky na energii. Nebo kombinací obojího. Za zmínku stojí, že dnes existuje tzv. řízení pomocí teorie chaosu, které se právě zabývá tím, jak převést řízený systém s minimálními nároky na energii do požadovaného stavu za využití potencionálních či již existujících oblastí chaotického chování ve stavovém prostoru systému.

Optimalizačních problémů je dnes nepřeberné množství a jejich obtížnost a komplexita neustále narůstá. Zatímco dříve se vše redukovalo na problémy řešitelné deterministickými metodami, tak dnes se spíše hledají metody, jenž by umožnily řešit komplikované problémy bez jejich zjednodušování. Tento trend je v podstatě způsoben mimo jiné také požadavky praxe a má původ v konkurenčním boji na trzích, kde náročnější technologie již nemohou používat zjednodušené modely a metody.

### 3.1 Účelová funkce

Výrazem „účelová funkce“ se v této publikaci bude rozumět funkce, jejíž optimalizace (nalezení minima či maxima) povede k nalezení optimálních hodnot jejich argumentů. Její označení bude dále  $f(x)$  nebo také  $f_{\text{cost}}(x)$ , kde anglické slovo „cost“ znamená „cena“. Účelové funkci se totiž dříve říkalo také „cenová funkce“. Před tím, nežli bude uvedeno pár příkladů toho, jak se sestavují účelové funkce, je vhodné si připomenout základní pojmy z oblasti optimalizace. Funkce má v bodě  $x_0$  lokální maximum, jestliže existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že platí

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (3.9)$$

pro všechna  $x$  z tohoto okolí. Funkce má v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum, jestliže existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že

$$f(x) < f(x_0) \quad (3.10)$$

pro všechna  $x$  z tohoto okolí, s výjimkou bodu  $x = x_0$ . Je-li  $X$  nějaká neprázdná množina z euklidovského  $N$ -rozměrného prostoru  $E_n$ , pak funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in X$  lokální maximum vzhledem k  $X$ , je-li funkce  $f$  na množině  $X$  definována a jestliže existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že (3.9) platí pro všechna  $x$  z tohoto okolí, která jsou současně body  $X$ . Ostré lokální maximum vzhledem k  $X$  se zavádí zcela obdobně, pouze místo (3.9) se požaduje platnost (3.10) při  $x \neq x_0$ .

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in X$  globální maximum vzhledem k  $X$ , jestliže (3.9) platí pro všechna  $x \in X$ . Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in X$  ostré globální maximum vzhledem k  $X$ , jestliže (3.10) platí pro všechna  $x \in X$ , s výjimkou  $x = x_0$ . Má-li  $f$  v bodě  $x_0$  maximum, nazývá se  $x_0$  bodem maxima funkce  $f$  (maximum ostré, lokální apod.). Funkční hodnotu  $f(x_0)$  nazýváme potom maximální hodnotou funkce.

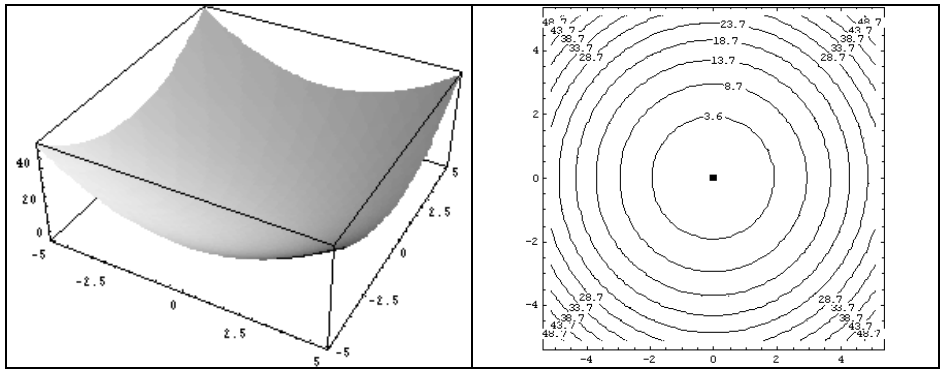
Definice minima funkce se získá, jestliže se ve vztazích (3.9) a (3.10) obrátí smysl nerovnosti. Výrazem extrém, se tedy myslí buď maximum, nebo minimum dané funkce. Má-li mít funkce  $f$  v bodě  $x$  lokální extrém, musí být definována v nějakém okolí tohoto bodu  $x$ . Na druhé straně funkce  $f$  může mít v  $x \in X$  extrém vzhledem k množině  $X$ , aniž je v nějakém okolí bodu  $x$  definována. Má-li  $f$  extrém vzhledem k  $X$  (ať už lokální, nebo globální) musí být vždy na  $X$  definována. U globálních extrémů to vyplývá z toho, že požaduje-li se  $f(x) <$  nebo  $=$  nebo  $> f(x_0)$ , musí především oba symboly  $f(x)$  a  $f(x_0)$  mít smysl.

### 3.2 Účelová funkce jako geometrický problém

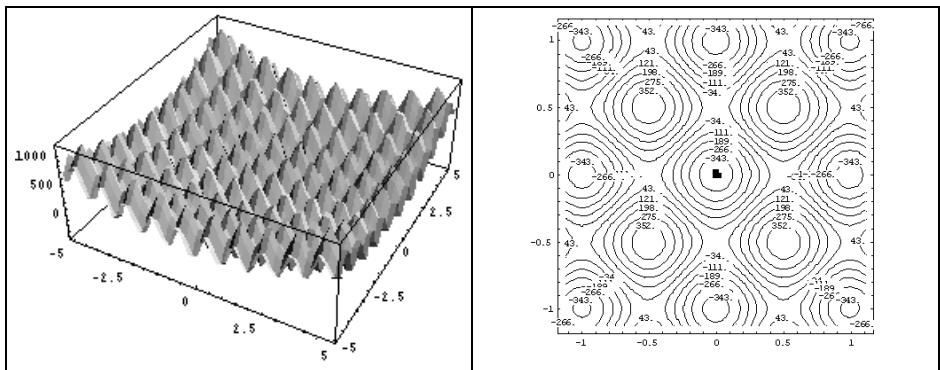
Na každou účelovou funkci lze nahlížet jako na geometrický problém, v jehož rámci se hledá nejnižší (minimum) či nejvyšší (maximum) pozice na  $N$  rozměrné ploše, pro kterou se někdy používá výraz „**hyperplocha**“ či „**prostor možných řešení**“ daného problému. Počet dimenzí  $N$  je dán počtem optimalizovaných argumentů účelové funkce.

Má-li optimalizovaná funkce např. šest argumentů (nezávisle proměnných), pak se hledá extrém na šestirozměrné ploše v sedmírozměrném prostoru, kde sedmá dimenze je v podstatě návratová hodnota účelové funkce. Prvních šest dimenzí má charakter os typu „ $x$ “ a „ $y$ “, zatímco sedmá má charakter osy „ $z$ “, použije-li se analogie třírozměrného prostoru.

Více jak třírozměrné geometrické konstrukce si samozřejmě nedovede nikdo graficky představit, nicméně analogie je zřejmá. Pro lepší představu jsou na *Obr. 3.1* demonstrovány dvě funkce s jedním extrémem (automaticky globální) a s globálním extrémem, jenž je obklopen mnoha extrémů lokálními.



**Obr. 3.1** Unimodální účelová funkce jako geometrický problém (černý bod vpravo reprezentuje globální extrém)



**Obr. 3.2** Multimodální účelová funkce jako geometrický problém (černý bod vpravo reprezentují globální extrém)

Mnohdy je situace mnohem složitější. Daná účelová funkce může obsahovat více stejných globálních extrémů na různých souřadnicích, nebo ještě hůře, matematicky vzato, je těchto extrémů nekonečně mnoho v případě, že argumenty a hodnota účelové funkce jsou reálného charakteru (viz Obr. 3.3). Přitom se může jednat o problémy ryze praktického charakteru. V případě, že existence více jak jednoho globálního extrému není únosná, je vhodné problém přeformulovat. Na druhou stranu však více globálních extrémů skýtá možnost nalezení více stejně kvalitních řešení, z nichž si řešitel může *a posteriori* vybrat.