

Obsah

PE5.1 PŘENOS ELEKTROMAGNETICKÉ ENERGIE	2
PE5.2 ROVNOST ELEKTRICKÉ A MAGNETICKÉ ENERGIE	12
PE5.3 VÝHODNOST STROJŮ S ELEKTROMAGNETICKOU INDUKCÍ.....	13
PE5.4 ELEKTROMAGNETICKÉ KMITÁNÍ	14
PE5.5 SAMOVOLNÉ KMITÁNÍ V RLC OBVODU	16
PE5.6 NUCENÉ KMITÁNÍ V RLC OBVODU	25
PE5.7 POROVNÁNÍ ÚČINNOSTI TRANSFORMÁTORU BEZ REZONANCE A S REZONANCÍ.....	33
PE5.8 SIMULACE TC	35

PE5.1 Přenos elektromagnetické energie [3]

V kapitole je snahou ukázat, že elektromagnetická energie se „nedopravuje“ ve vodičích, jak je obecně vžitá představa, nýbrž se šíří okolím vodičů. Vodiče jsou ovšem nezbytné, neboť zaručují geometrii pole.

Je sledován způsob přenosu elektromagnetické energie, jak ho lze určit s pomocí Maxwellových rovnic.

Pro objemovou hustotu energie el. a mg. pole platí

$$w_e = \frac{\delta W_e}{\delta V} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \quad w_{mg} = \frac{\delta W_{mg}}{\delta V} = \frac{1}{2} \cdot H \cdot B.$$

Pro stanovení přenosu elektromagnetické energie stanovíme časové změny polí. Časové derivace představují změny el. a mg. hustot energie, které budou doprovázeny *přesunem* energie z místa na místo. Pro časové derivace dostaneme

$$\frac{\delta w_e}{\delta t} = \vec{E} \cdot \vec{\epsilon} \cdot \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} = \vec{E} \cdot \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} \quad \frac{\delta w_{mg}}{\delta t} = \vec{H} \cdot \vec{\mu} \cdot \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} = \vec{H} \cdot \frac{\delta \vec{B}}{\delta t}.$$

Nyní vyjdeme z 1. a 2. Maxwellovy věty definované pro prostředí vodivé, lineární a homogenní.

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}.$$

Aby se získaly časové změny objemových hustot energií, je potřeba násobit obě rovnice tak, abychom získali výrazy shodné s předchozími vztahy pro hustoty energií. Tím se také zajistí, že rozměry dílčích vztahů budou odpovídat hustotám v $J.m^{-3}$.

První rovnici skalárně vynásobíme vektorem intenzity el. pole \vec{E} . Druhou Maxwellovou rovnici rovněž skalárně vynásobíme vektorem intenzity mg. pole \vec{H} . Po vynásobení dostaneme soustavu dvou rovnic ve tvaru

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} \quad \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\delta \vec{B}}{\delta t}.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} + \vec{H} \cdot \frac{\delta \vec{B}}{\delta t}.$$

Pro levou stranu rovnice z vektorového počtu platí

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = -\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}).$$

Po dosazení dostaneme

$$-\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \left(\vec{E} \cdot \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} + \vec{H} \cdot \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \right)$$

a po úpravě

$$0 = \vec{E} \cdot \vec{J} + \left(\vec{E} \cdot \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} + \vec{H} \cdot \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \right) + \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}).$$

Pro členy v závorce dosadíme z předchozího

$$\vec{E} \cdot \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} = \frac{\delta w_e}{\delta t} \quad \vec{H} \cdot \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} = \frac{\delta w_{mg}}{\delta t} \quad \frac{\delta w_e}{\delta t} + \frac{\delta w_{mg}}{\delta t} = \frac{\delta w}{\delta t}.$$

Po dosazení dostaneme

$$0 = \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{\delta w}{\delta t} + \text{div}(\vec{E} \times \vec{H})$$

Vektorový součin $(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{P}$ je Poyntingův vektor, jež v r. 1884 zavedl John Henry Poynting. Je to vektorová veličina vyjadřující množství energie přenášené elektromagnetickým vlněním za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na směr šíření, též měrný výkon ve $[W.m^{-2}]$.

Pro stacionární případ musí být Jouleho ztráty hrazeny vnějším zdrojem. Dosadíme proto člen p_z , kde p_z je měrný příkon vnějšího el. zdroje. Po jejím dosazení dostaneme

$$p_z = \vec{E} \cdot \vec{J} + \left(\vec{E} \cdot \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} + \vec{H} \cdot \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \right) + \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}).$$

Celková výkonová balance po dosazení bude

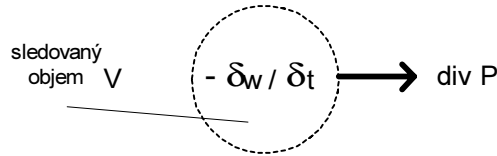
$$P_z = P_J + \frac{dW}{dt} + \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}.$$

První člen na levé straně představuje tok energie (výkon) dodaný ze zdroje. První člen na pravé straně vyjadřuje výkonové ztráty ve vodičích (Jouleho teplo), druhý člen vyjadřuje zvětšení elektromagnetického pole v daném objemu, třetí člen představuje energii vyzářenou z objemu V plochou S do okolí.

V případě, kdy ve sledovaném objemu nejsou zdroje, tj. $(P_z = 0)$ a obvod je beze ztrát, tj. $(\gamma = 0)$, což platí např. pro nevodivé prostředí se výraz výkonové bilance zjednoduší na tvar

$$\operatorname{div} \vec{P} + \frac{\delta w}{\delta t} = 0.$$

Vztah představuje rovnici kontinuity toku energie v elektromagnetickém poli (Umovův vztah). Vyjadřuje též zákon zachování elektromagnetické energie.

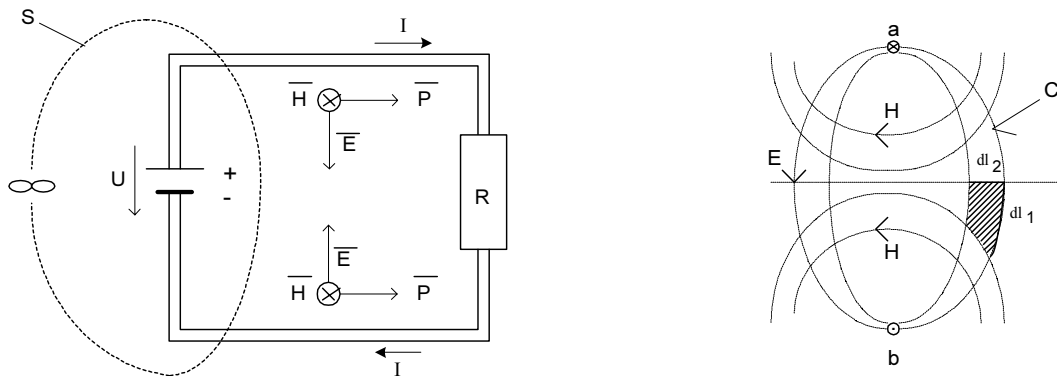


Obr. PE5.1.1 K rovnici kontinuity

Člen $\operatorname{div} \vec{P}$ představuje hustotu elektromagnetické energie, která ze sledovaného objemu „vyteče“, člen $\left(-\frac{\delta w}{\delta t}\right)$ je úbytek hustoty elektromagnetické energie v objemu V . Elektromagnetická energie se do sledovaného objemu dostává zářením skrze jeho povrch.

PE5.1.1 Přenos energie ss proudem bezodporovým vedením

Nechť se vedení skládá ze dvou rovnoběžných vodičů kruhového průřezu, jak je ukázáno na dalším obr.



el. zdroj → vedení → el. spotřebič

a)

b)

Obr. PE5.1.1.1 a) Podélný pohled na uzavřený el. obvod,

b) příčný řez vodičem protékaným ss proudem

Provedeme integraci \vec{P} vektoru po obalové ploše S uzavírající se až přes nekonečno ∞ . Nechť v urč. vzdálenosti od vodičů jsou siločivky el. a mg. pole podle náčrtu (viz vyšrafovaná plocha). Pole v příčné rovině je dvourozměrné a statické.

Z bilanční rovnice pro bezodporové vedení zůstávají pouze dva členy – výkon zdroje a zářivý výkon obalovou plochou. Lze tedy psát

$$\iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_S E \cdot H \cdot dS = \int_a^b \int_C E \cdot dl_1 \cdot H \cdot dl_2.$$

Pro obr. 5.1.1.1b pro nekonečně malé přírůstky platí, že $dS = dl_1 \cdot dl_2$. Při oběhu po křivce platí, že $dU = E \cdot dl_1$,

$dI = H \cdot dl_2$, z čehož $U = \int_a^b E \cdot dl_1 = konst.$, $I = \int_C H \cdot dl_2$. Lze tedy integrály rozdělit na součin dvou

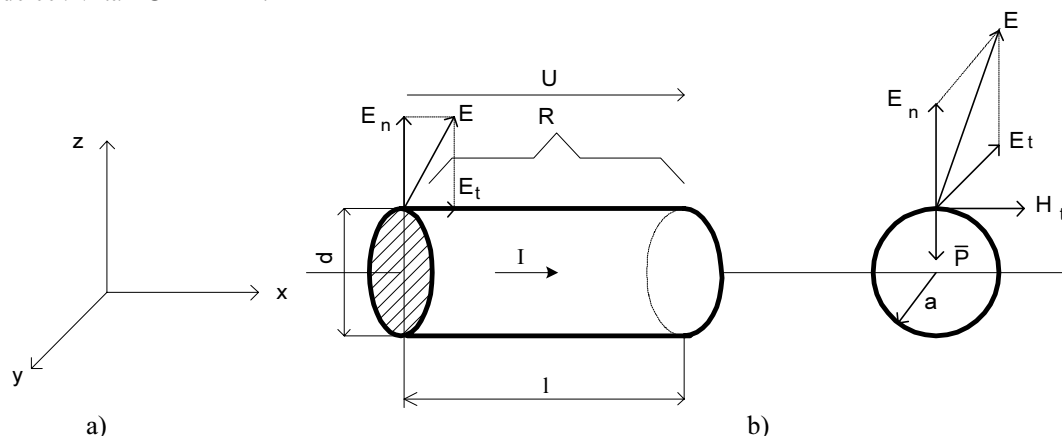
$\int_a^b E \cdot dl_1 \cdot \int_C H \cdot dl_2$. Dosazením dostaneme pro výkon zdroje

$$P_z = U \cdot I = \int_a^b E \cdot dl_1 \cdot \int_C H \cdot dl_2 = \iint_S E \cdot H \cdot dS.$$

Vztah udává rovnost mezi výkonem dodaným zdrojem a výkonem ze zdroje vyzářeným, který je přenášený elektromagnetickým polem.

PE5.1.2 Přenos energie ss proudem odporovým vedením

Nechť vodič kruhového průřezu o délce l má el. odpor R a nechť jím protéká proud I . Z Ohmova zákona lze psát pro napětí na délce l vztah $U = R \cdot I$.



Obr. PE5.1.2.1 Část homogenního odporového vodiče protékaného proudem

Na povrchu vodiče je velikost intenzity tečné složky intenzity el. pole $E_t = \frac{U}{l} = \frac{R \cdot I}{l}$, velikost normálové složky

intenzity el. pole $E_n = \frac{U}{2\pi \cdot a}$ a z Ampérova zákona velikost intenzity mg. pole $H_t = \frac{I}{2\pi \cdot a}$.

Platí $E_n \equiv E_z$, $E_t \equiv E_x$, $H_t \equiv H_y$.

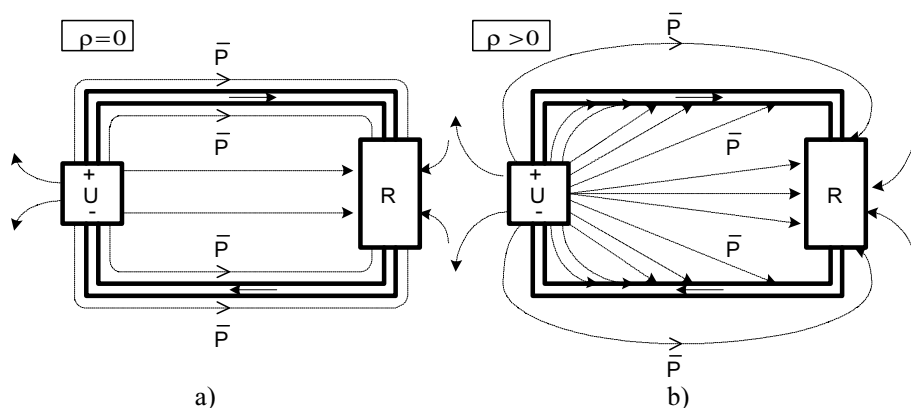
Hodnota \vec{P} vektoru je ve vektorovém tvaru $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$, z čehož plyne pro jeho složky

$$P_z = E_x \cdot H_y = \frac{R \cdot I}{l} \cdot \frac{I}{2\pi \cdot a} = \frac{R \cdot I^2}{2\pi \cdot a \cdot l} = \frac{R \cdot I^2}{S},$$

$$P_x = E_z \cdot H_y = \frac{U}{2\pi \cdot a} \cdot \frac{I}{2\pi \cdot a} = \frac{U \cdot I}{(2\pi \cdot a)^2} = \frac{R \cdot I^2}{4\pi \cdot (\pi \cdot a^2)},$$

kde S je povrch kruhového (válcového) vodiče délky l , (πa^2) je průřezová plocha vodiče.

Výsledný směr vektorového součinu \vec{P} směřuje šikmo do povrchu vodiče. Množství přetransformované elektromagnetické energie pokrývá přesně ztráty způsobené Jouleho teplem $(R \cdot I^2)$.



Obr. PE5.1.2.2 Vektorové čáry \vec{P} vektoru, a) pro bezodporové vedení, b) pro odporové vedení

Poznámka

Pro bezodporové vedení je povrch vodiče ekvipotenciální plochou, proto složka tečné intenzity el. pole

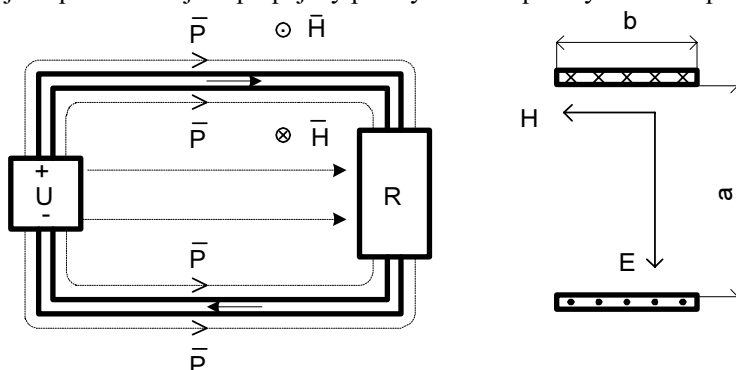
$$E_t = -\frac{d\varphi}{dx} = 0, \text{ protože } d\varphi = 0. \text{ Normálová složka } E_n \neq 0, \text{ což způsobuje, že směr } \vec{P} - \text{vektoru je rovnoběžný}$$

s povrchem vodiče. Složka \vec{H} – vektoru je generována \vec{P} – vektorem, který dále generuje el. proud ve vodiči neboť $I = \vec{H} \cdot \vec{l}$.

Představa, že elektromagnetická energie „teče“ pouze ve vodiči spojujícím zdroj U se spotřebičem R se ukázala jako neúplná. Ve vodiči není fyzikální objekt, který by mohl zprostředkovat požadovaný transport. Ve vodiči probíhá vlivem vnitřního el. pole pouze uspořádaný pohyb elektronů, ten je ale pomalý a není schopen „propůjčit“ elektronům potřebnou kinetickou energii k transportu požadovaného množství elektromagnetické energie. Ukazuje se, že je nutno přijmout představu, že elektromagnetická energie se šíří nikoliv vnitřkem vodiče, nýbrž jeho okolím (viz směry \vec{P} vektoru), přičemž vodič udává pouze geometrii pole.

PE5.1.3 Přenos elektromagnetické energie plochými vodiči

Uvažujme případ, že zdroj se spotřebičem jsou propojeny plochými bezodporovými vodiči podle náčrtu



Obr. PE5.1.3.1 Propojení zdroje se spotřebičem bezodporovými plochými vodiči

Mezi pásy je homogenní el. pole velikosti $E = \frac{U}{a}$ a homogenní mg. pole o velikosti $H = \frac{I}{b}$, kde I je proud plochými vodiči. Přenášený výkon je

$$P = U \cdot I = E \cdot a \cdot H \cdot b = E \cdot H \cdot (a \cdot b) = E \cdot H \cdot S,$$

kde S je plocha příčného řezu mezi plochými vodiči podle náčrtu.

Je vidět, že i v tomto případě pro hustotu toku energie vyhovuje vektor $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$.

I pro tento případ platí, že energie se transportuje elektromagnetickým polem *vně* vodičů a nikoliv jejich „vnitřkem“.

Pro vodiče odporové bychom dospěli ke shodným výsledkům jako v PE5.1.2.

Pro rychlost elmag. vlnění (energie) platí vztah

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \cdot \mu}} \text{ [m.s}^{-1}\text{]}.$$

a) pro vakuum (vzduch) $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \equiv c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

b) pro izolant $\epsilon_r > 1, \mu_r = 1$

$$v_i = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

c) pro vodič $\epsilon_r > 1, \mu_r > 1$

$$v_v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}.$$

Zřejmě platí, že $c > v_i > v_v$.

PE5.1.4 Pohyby elektronů v odporovém vodiči

Z fyziky je známo, že atomy kovů mají jeden nebo několik elektronů ve vnější slupce. Jsou to valenční elektrony, které nejsou pevně vázány k jádru atomu. Krystalovou mříž kovů tvoří kladné ionty, což jsou atomy kovů, zbavené valenčních elektronů. Elektrony se mohou volně krystalovou mříží pohybovat. Lorentz na počátku 20. století využil výsledků kinetické teorie plynů pro popis pohybu elektronů v krystalové mříži. Volné elektrony nazval elektronovým plynem.

a) pohyb termický

Uplatněním kinetické teorie plynu na elektrony v krystalové mříži lze psát $\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_{ef}^2 = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T_e$, kde m_e je hmotnost elektronu, v_{ef} je efektivní hodnota tepelné rychlosti elektronů, k je Boltzmannova konstanta, T_e je teplota elektronového plynu. Efektivní hodnota tepelné rychlosti bude pro $t = 0$ °C = 273 K. Po dosazení

$$v_{ef} = \sqrt{3 \frac{k}{m_e} \cdot T_e} = \sqrt{3 \cdot \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 273 \cdot 10^2} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1} = 111 \text{ km.s}^{-1}.$$

Je vidět, že tepelná rychlost elektronů je značná.

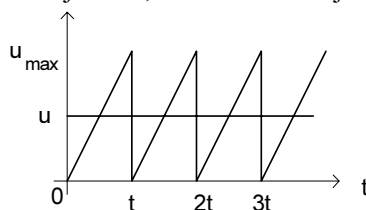
b) pohyb el. polem

Připojením vodiče ke zdroji napětí se ve vodiči vytvoří el. pole, které usměrní pohyb elektronů a udělí mu tzv. unášivou rychlost u ve směru ke kladnému pólu el. zdroje. Uplatněním kinetické teorie a 2. Newtonova pohybového zákona lze

psát, že $F_{mech} = F_{el}$, tj. po dosazení $m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = e \cdot E$, kde člen $\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)$ představuje zrychlení unášivého pohybu elektronu, e je náboj elektronu a E je hodnota intenzity el. pole uvnitř vodiče. Po separaci proměnných dostaneme

$$\int du = \frac{e \cdot E}{m_e} \int dt + u(0). \text{ Po integraci dostaneme } u = \frac{e \cdot E}{m_e} \cdot t + u(0),$$

kde $u(0)$ je počáteční unášivá rychlost, člen $\left(\frac{e \cdot E}{m_e} \right)$ představuje zrychlení elektronu ve vodiči, kterou elektron získá pohybem v el. poli o intenzitě E . Čas t představuje dobu, která uběhne od jedné srážky elektronu ke druhé.



Obr. PE5.1.4.1 Časový průběh uspořádané rychlosti ve vodiči

Z obr. plyne, že platí $t = \frac{1}{f}$, kde f představuje kmitočet srážek, čas t je roven periodě srážek. Za dobu t nabude elektron ve směru el. síly v el. poli vodiče max. unášivé rychlosti $u_{max} = \frac{e \cdot E}{m_e} \cdot t + u(0) = \frac{e \cdot E}{m_e \cdot f} + u(0)$.

Od času $t = 0$ se elektron pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem až do srážky, tj. po čase t . Pak se opět začne urychlovat z nulové rychlosti. Pokládáme tedy, že $u(0) = 0$. Průměrná rychlost unášivého pohybu bude rovna

$$u = \frac{1}{2} u_{max} = \frac{1}{2} \frac{e \cdot E}{m_e \cdot f}.$$

Pro proudovou hustotu platí, že $J = e \cdot n_e \cdot u$. Po dosazení dostaneme

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \frac{e^2 \cdot n_e}{m_e \cdot f} \cdot \vec{E}.$$

Výraz je znám jako Ohmův zákon ve vektorovém tvaru $\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}$, kde vodivost je $\gamma = \frac{1}{2} \frac{e^2 \cdot n_e}{m_e \cdot f}$.

Příklad

Máme stanovit velikost střední hodnoty unášivé rychlosti elektronů v mědi a porovnat s rychlostí tepelnou a rychlostí přenosu elektromagnetické energie ve vzduchu. Pro Cu je iontová koncentrace $n_e = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, proudovou hustotu ve vodiči volíme $J = 10 \text{ A.mm}^{-2} = 10^7 \text{ A.m}^{-2}$.

Po dosazení dostaneme $u = \frac{J}{e \cdot n_e} = \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,45 \cdot 10^{28}} = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1} = 0,74 \text{ mm.s}^{-1}$.

Po porovnání dostaneme $k_1 = \frac{v_{ef}}{u} = \frac{1,1 \cdot 10^5}{7,4 \cdot 10^{-4}} = 1,48 \cdot 10^8$.

Je vidět, že rychlost tepelného pohybu je ve srovnání s rychlostí unášivou je mnohonásobně vyšší.

Porovnáním s rychlostí světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ dostaneme

$$k_2 = \frac{c}{u} = \frac{3 \cdot 10^8}{7,4 \cdot 10^{-4}} = 4,05 \cdot 10^{11}.$$

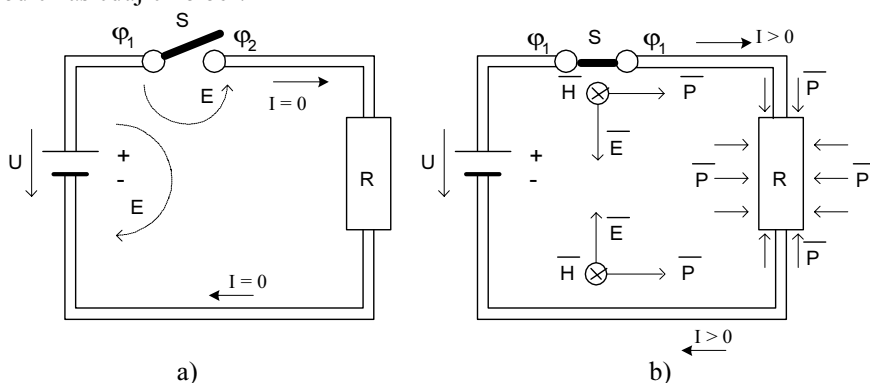
Z porovnání vyplývá obrovský nepoměr mezi rychlostí světla, tj. rychlostí přenosu elektromagnetické energie vně vodiče a rychlostí pohybu elektronů ve vodiči. Protože experimentálně bylo dokázáno, že rychlost přenosu el. signálu po vodiči je shodná s rychlostí světla, je nutno přijmout představu, že elektromagnetická energie se „nedopravuje“ ve vodičích, jak je obecně vžitá představa, nýbrž se šíří okolím vodičů. Vodiče jsou ovšem nezbytné, neboť zaručují geometrii pole.

PE5.1.5 Unášivá rychlost v bezodporovém vodiči

I u bezodporového vodiče bude termický pohyb elektronů, vliv el. pole na pohyb elektronů se ale projeví výrazněji.

Pro bezodporové vodiče platí, že jejich rezistivita $\rho = 0$. Nic tedy nebude bránit volným elektronům v jejich pohybu.

Uvažujme obvod podle následujícího obr.



Obr. PE5.1.5.1 Situace v rozpojeném a uzavřeném obvodu

Při rozpojeném spínači S bude nulový proud v obvodu. Potenciální rozdíl vznikne pouze mezi kontakty spínače. Necht' na počátku spínání pro $t = 0 \rightarrow I = 0$. El. siločáry jsou podle obr. těsně před sepnutím spínače S bude na jeho kontaktech rozdíl potenciálů $\phi_1 - \phi_2 = U$. Na počátku procesu spínání, který trvá Δt se ve vodiči vytvoří podélné el. pole o

intenzitě $E = \frac{U}{l}$, kde l je celková délka vodiče. Tato intenzita generuje počáteční el. sílu $F_e = e \cdot E$, která uvede

volné elektrony ve vodiči do pohybu a udělí jim unášivou rychlost. Tu lze stanovit z podmínky $F_{mech} = F_e$, tj. po dosa-

zení $m_e \cdot \frac{du}{dt} = e \cdot E$, z čehož bude $du = \frac{e}{m_e} \cdot E \cdot dt$. Integrací vztahu dostaneme $\int du = \frac{e \cdot E}{m_e} \int dt + u(0)$.

Veličina $u(0)$ představuje unášivou rychlost před sepnutím spínače S . Ta je ale dána tepelnou rychlostí se střední hod-

notou $u(0) = 0$. Budeme tedy uvažovat zrychlení, které bude uděleno volným elektronům $a = \frac{du}{dt} = \frac{e}{m_e} \cdot E = \frac{e}{m_e} \cdot \frac{U}{l}$

v průběhu spínacího procesu. Počáteční síla na elektrony bude $F_e = m_e \cdot a = e \cdot \frac{U}{l}$. Tato el. síla udělí elektronům

impulz síly $I = F_e \cdot \Delta t$, který bude roven hybnosti elektronů, tj. platí $F_e \cdot \Delta t = m_e \cdot u$. Impulz síly udělí elektronům

počáteční unášivou rychlost u_0 , která bude konstantní a bude rovna $u_0 = \frac{F_e \cdot \Delta t}{m_e} = \frac{e}{m_e} \cdot \frac{U}{l} \cdot \Delta t$.

Pro konkrétní el. obvod je tedy spočitatelná.

Příklad

Uvažujme, že $U = 1 \text{ V}$, $l = 1 \text{ m}$, $\Delta t = 1 \text{ ms}$, kde Δt představuje dobu spínání mechanického spínače.

Po dosazení dostaneme $u_0 = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1} \cdot 10^{-3} = 1,76 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} = 176\,000 \text{ km.s}^{-1}$.

Pro takto velkou hodnotu rychlosti je již potřeba uvažovat vliv relativity.

Vliv relativity na čas a hybnost elektronu

Pro relativistickou hybnost platí $F \cdot \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v$.

Po dosazení pro náš příklad dostaneme $F_e \cdot \Delta t = m_e(0) \cdot u$.

Ze vztahu je vidět, že vliv relativity na výslednou hodnotu počáteční unášivé rychlosti volných elektronů v bezodporovém vodiči se neprojeví.

Pro bezodporový vodič platí $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, z čehož intenzita el. pole ve vodiči $E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = 0$. Nevznikne tedy ve vodiči trvalá el. síla, která by urychlovala elektrony. Podélný pohyb elektronů bude dán pouze počátečním impulzem el. síly při sepnutí spínače.

Poznámka

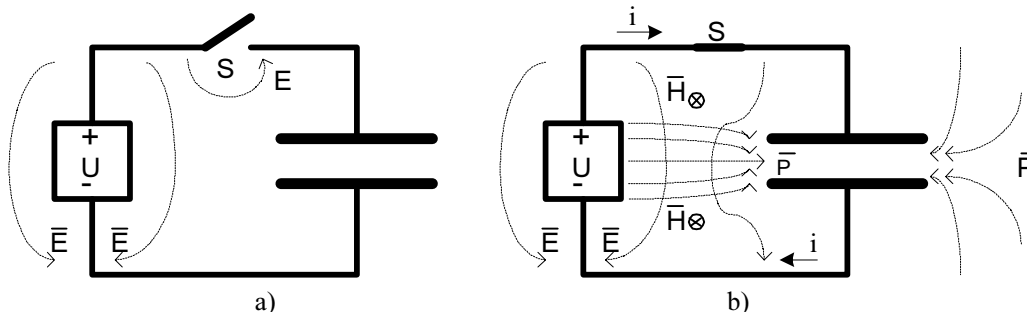
Pozorný čtenář může poukázat na rozdílnou rychlost elektromagnetické energie vně vodiče a ve vodiči. A jestli tento rozdíl v rychlostech nebude působit problémy při přenosu. Je potřeba si uvědomit, že impuls el. síly při spínání působí na volné elektrony jak ve vodiči u zdroje, tak i u spotřebiče. Z toho důvodu nevznikne žádné „zpoždění“ při přenosu energie uvnitř vodiče a vně vodiče.

Konkrétní hodnoty unášivé rychlosti jsou dány zvolenými hodnotami napětí zdroje U a zvolenou délkou vodiče l .

Hlubší rozbor šíření elmag. vln v látkách přesahuje již rámec knihy o VN zdrojích.

PE5.1.6 Nabíjení a vybíjení kapacitoru

Uvažujme případ nabíjení kapacitoru z reálného ss zdroje napětí podle obr.



Obr. PE5.1.6.1 Nabíjení kapacitoru, a) spínač rozepnutý, b) spínač sepnutý

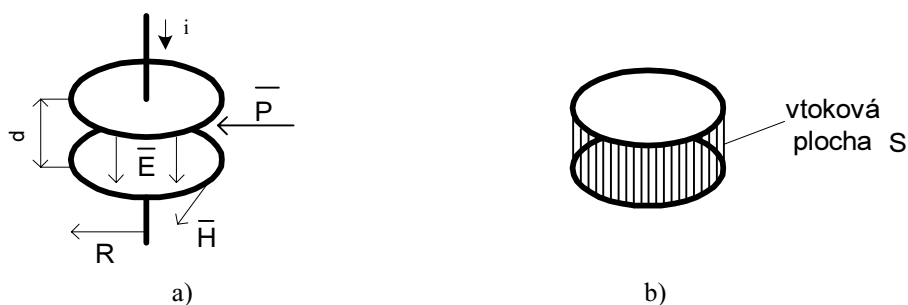
V případě, kdy je spínač rozepnutý, je elektrostatické pole pouze mezi póly ss zdroje. Směr siločar intenzity el. pole E je podle náčrtu.

V případě sepnutého spínače se kapacitor postupně nabíjí na napětí U . Po nabití je v kapacitoru nahromaděna elektrostatická energie $W_e = \frac{1}{2} C \cdot U^2$. Nabíjecí proud i vytváří ve svém okolí mg. pole o intenzitě H , jehož siločáry obepínají

vodiče. El. a mg. pole generuje vektor $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$, jehož vektorové čáry směřují mezi elektrody do kapacitoru podle náčrtu.

Energie ztracená v odporu R (viz přílohu PE1.5 – Nabíjení a vybíjení kapacitoru).

Pro stanovení P – vektoru je potřeba uvažovat rozměry kapacitoru.



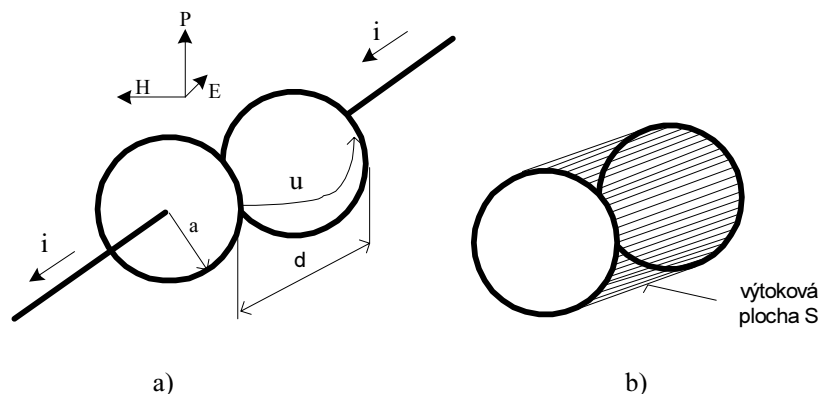
Obr. PE5.1.6.2 a) Stanovení \vec{P} – vektoru, b) vtoková plocha S pro $\left(\frac{du}{dt} > 0\right)$

Platí, že $E = \frac{U}{d}$, $H = \frac{I}{2\pi \cdot a}$. Po dosazení do vztahu pro výkon dostaneme

$$p = U \cdot I = (E \cdot d) \cdot (2\pi \cdot a \cdot H) = E \cdot H \cdot (2\pi \cdot a \cdot d) = (E \cdot H) \cdot S,$$

kde S je boční vtoková plocha \vec{P} – vektoru, kterou vniká elektromagnetická energie při nabíjení do kapacitoru.

Vybíjení kapacitoru



Obr. PE5.1.6.3 a) Vybíjení deskového kondenzátoru s výtokem \vec{P} – vektoru, b) výtoková plocha S pro $\left(\frac{du}{dt} < 0\right)$

Okamžitý výkon při vybíjení je $p = u \cdot i$. Ten je roven záporně vzaté časové změně elektrostatické energie

$$\left(\frac{dW_e}{dt} < 0\right) \text{ v kapacitoru}$$

$$p = -\frac{dW_e}{dt} = -u \cdot i = -E \cdot d \cdot l \cdot H = -E \cdot H \cdot S,$$

kde délka mg. siločáry je $l = 2\pi \cdot a$, vyznačující plochu \vec{P} vektoru $S = 2\pi \cdot a \cdot d$.

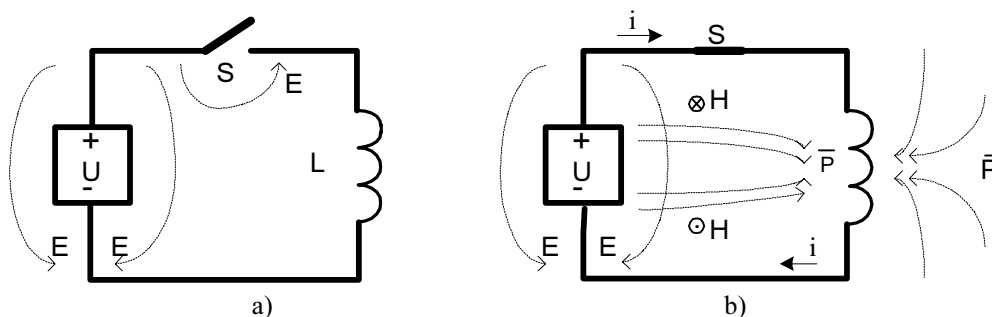
Vektor $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ směřuje z plochy S ven a představuje výtok elektromagnetické energie z kapacitoru.

Poznámka

Vtoková i výtoková plocha vektoru \vec{P} je totožná, rozdíl je pouze ve směru vektoru \vec{P} . Uvažujeme-li spotřebičovou orientaci, pak vtokový výkon chápeme jako kladný a výtokový výkon jako záporný.

PE5.1.7 Nabíjení a vybíjení induktoru

Uvažujme případ nabíjení induktoru reálným zdrojem ss napětí podle náčrtu

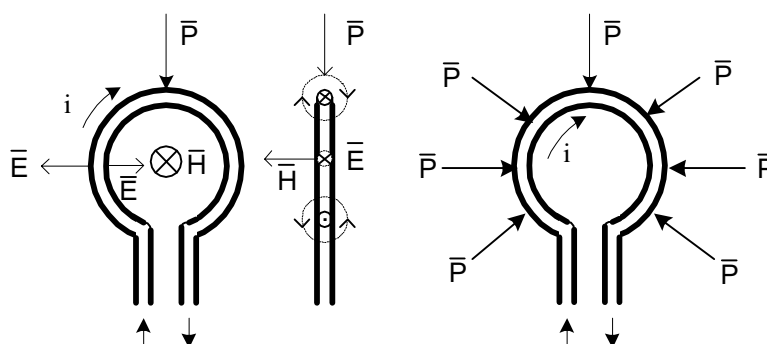


Obr. PE5.1.7.1 Nabíjení induktoru $\left(\frac{di}{dt} > 0\right)$, a) spínač rozepnutý, b) spínač sepnutý

Při rozepnutém spínači S je elektrostatické pole mezi póly zdroje a mezi prvky obvodu s potenciálním rozdílem U . Energie ztracená v odporu R (viz přílohu PE1.7 – Nabíjení a vybíjení induktoru).

PE5.1.8 Přenos elektromagnetické energie do proudové smyčky

Uvažujme proudovou smyčku protékanou proudem a navinutou z bezodporového vodiče.



Obr. PE5.1.8.1 a) Vektory E , H , P proudové smyčky, b) směry vtékání P – vektoru do smyčky pro $\left(\frac{di}{dt} > 0\right)$

Transport elektromagnetické energie se bude dít po obvodu proudové smyčky.

Pro solenoid, což je sériové uspořádání proudových smyček bude pro

a) $\left(\frac{di}{dt} > 0\right)$ bude vektor P směřovat směrem *do* solenoidu

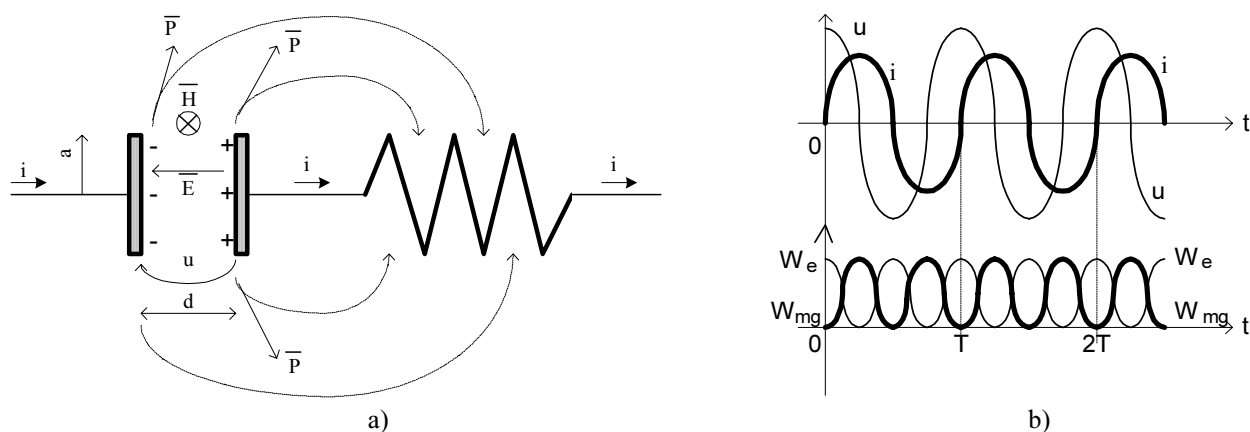
b) $\left(\frac{di}{dt} < 0\right)$ bude vektor P směřovat směrem *od* solenoidu.

Poznámka

Pokud $\left(\frac{di}{dt} > 0\right)$, energie v systému se zvětšuje, tj. platí $\left(\frac{dW_{mg}}{dt} > 0\right)$ a naopak pro $\left(\frac{di}{dt} < 0\right)$ bude $\left(\frac{dW_{mg}}{dt} < 0\right)$.

PE5.1.9 Přenos elektromagnetické energie v LC obvodu

Uvažujme pro jednoduchost bezodporový kmitavý LC obvod podle náčrtu.



Obr. PE5.1.9.1 a) Tok energie z kapacitoru do induktoru

b) časové průběhy u , i , W_e , W_{mg}

Při sinusových průbězích u , i se energie mezi L , C přemísťuje $2\times$ za periodu.

Protože ve vodičích není fyz. objekt, který by zajistil transport energie W_e z kapacitoru a W_{mg} z induktoru rychlostí světla, je potřeba předpokládat, že energie W_e , W_{mg} „proudí“ prostorem a dostává se z C do L prostřednictvím elektromagnetického pole, jehož plošná hustota výkonu je dána P – vektorem.

Poznámka

Směr P – vektoru se v průběhu periody mění podle toho, jde-li energie od $W_e \rightarrow W_{mg}$ nebo naopak.

PE5.1.10 Elektrická rezonance

Jde o speciální fyzikální jev, kdy střední hodnoty el. a mg. energie nabývají shodných hodnot., tj. když platí

$$W_e - W_{mg} = 0.$$

Zdroj v tomto případě nemusí dodávat jalový výkon. Energie v kmitavém LC obvodu $2\times$ za periodu přejde z W_e na W_{mg} a naopak. V případě, že LC obvod je bezodporový, platí

$$W = W_e + W_{mg} = \text{konst.}$$

Jako hodnotící kritérium kvality LC kmitavého obvodu je zvolen poměr výkonů jalového ku ztracenému ve tvaru

$$Q = \frac{P_j}{P_\epsilon},$$

kde P_ϵ je ztracený Jouleho výkon, Q je činitel jakosti reálného LC obvodu.

Literatura

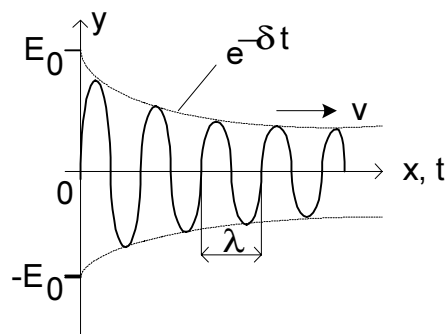
- [1] Haňka, L.: Teorie elektromagnetického pole, SNTL, Praha, 1975, 1982
- [2] <http://lucy.troja.mff.cuni.cz>
- [3] Elektřina a magnetismus (kurz MIT Physics 8.02) www.aldebaran.cz/elmg

PE5.2 Rovnost elektrické a magnetické energie

Platnost vztahu $W_e = W_{mg}$ je splněna při šíření elektromagnetického vlnění v izotropním prostředí, např. ve vakuu. V tom případě se energie elektrického pole W_e zcela přetvoří na energii magnetického pole W_{mg} a naopak.

Uvažujme případ, že by tomu tak nebylo a sinusová rovinná vlna intenzity el. pole v rovině osy y by byla tvaru

$E_y(x, t) = E_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$, kde δ je činiteľ tlumení vlny, ω je úhlový kmitočet vlny, v je její rychlost, E_0 je amplituda vlny v čase $t = 0$. Situaci si lze nakreslit ve tvaru



Obr. 5.2.1 Příklad tlumené rovinné vlny E_y

Příklad

Uvažujme případ, že by tlumení $\delta = 10^{-6}$, amplituda E_0 by poklesla např. na hodnotu $10^{-6} E_0$ za čas t je

$$10^{-6} E_0 = E_0 \cdot e^{-10^{-6} t},$$

z čehož po úpravě dostaneme $t = 1,38 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 160 \text{ dnů}$.

Za tuto dobu elektromagnetické záření urazí dráhu $x = c \cdot t = 3 \cdot 10^8 \cdot 1,38 \cdot 10^7 = 4,14 \cdot 10^{15} \text{ m}$. Po uběhnutí této vzdálenosti se amplituda intenzity záření zmenší na hodnotu 10^{-6} počáteční hodnoty.

Dráha jednoho světelného roku je rovna $1 \text{ s.r.} \approx 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$. Uběhnutá dráha představuje asi 44 % délky světelného roku. Za touto vzdáleností bychom již světlo hvězd neviděli. Protože tomu ale tak není, a hvězdy lze vidět z podstatně větší vzdálenosti, zřejmě platí $W_e = W_{mg}$.

Poznámka

Činitelem tlumení δ se rozumí tlumení při šíření rovinné vlny ve směru od zdroje k pozorovateli.

PE5.3 Výhodnost strojů s elektromagnetickou indukcí

V technické praxi se v podstatné míře používají el. zařízení pracující na principu elektromagnetické indukce než na principu elektrostatické indukce.

Abychom mohli na tuto otázku zodpovědět, proč tomu tak je, vyjděme z rovnosti energií elektrické a magnetické při šíření.

Nechť platí $W_e = W_{mg}$. Rovnice je splněna i pro objemové hustoty energií $w = \frac{dW}{dV}$ (J.m^{-3}), tj. $w_e = w_{mg}$. Po dosa-

zení dostaneme $\frac{1}{2} \cdot H \cdot B = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D$, z čehož použitím $B = \mu \cdot H$ dostaneme $\mu \cdot H^2 = \varepsilon \cdot E^2$. Uvažujeme rychlost

šíření elektromagnetické energie v izotropním prostředí danou vztahem $v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \cdot \mu}}$ nebo pro vakuum (vzduch)

$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$. Úpravou předchozího vztahu dostaneme pro hodnotu intenzity el. pole $E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot H$, pro vzduch

$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot H$. Zlomek pod odmocninou rozšíříme a upravíme

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \mu_0}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot H = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot \mu_0 \cdot H = c \cdot B.$$

Vztah ukazuje souvislost mezi hodnotou mg. indukce B a hodnotou el. intenzity E ve vakuu (vzduchu).

Příklad

Předpokládejme, že používáme el. motor, který pracuje na principu elektromagnetické indukce, pracující s mg. indukcí $B = 1 \text{ T}$. Chceme-li navrhnout motor shodného výkonu, který pracuje na principu elektrostatické indukce, potřebovali bychom použít intenzitu el. pole o hodnotě $E = c \cdot B = 3 \cdot 10^8 \text{ V.m}^{-1}$. Je známo, že kritická hodnota intenzity el. pole, při níž ve vzduchu nastává již průraz je $E \approx 3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$.

Poznámka

Je tedy zřejmé, že nelze vyrobit elektrostatický motor se shodným výkonem jako „elektromagnetický“ motor o shodných rozměrech. Vzduchové elektrostatické motory se proto vyznačují pro dané rozměry menšími dosahovanými výkony nebo pro daný výkon podstatně většími geometrickými rozměry.

Tato skutečnost se obchází např. vložení motoru do plynu nebo do vakua, což ale komplikuje jejich konstrukci. Další nevýhodou elektrostatických motorů je jejich činnost na VN a tím nebezpečí úrazu při jejich provozu.

Jejich výhodou může být téměř 100% účinnost.

PE5.4 Elektromagnetické kmitání [3], [4], [6], [10]

Kmitání v systému nastává, jestliže obsahuje prvky se schopností akumulace energií.

Elektromagnetické kmitání nastává v systému tehdy, jestliže systém obsahuje akumulační prvky, tj. kapacitu (C) se schopností akumulace el. energie a indukčnost (L) se schopností akumulace energie mg. pole (mg. energie).

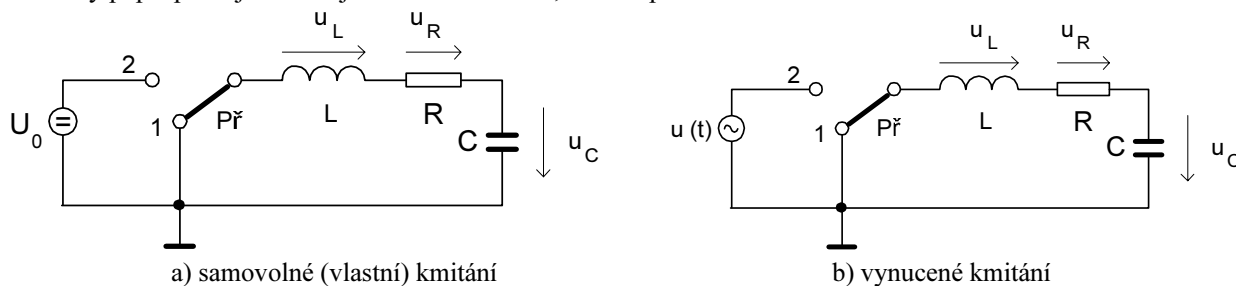
Podle [2] se dělí elektromagnetické kmity na následující typy

1. periodické – amplituda a perioda kmitů je konstantní
(např. $U_m = konst.$), $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t \pm \varphi)$,
2. kvaziperiodické – přibližně periodické
3. netlumené – činitel tlumení je nulový (např. $\delta = \frac{R}{2L} = 0 \rightarrow R = 0$),
rezonanční úhlový kmitočet $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$,
4. tlumené – činitel tlumení není nulový (např. $\delta = \frac{R}{2L} > 0 \rightarrow R > 0$),
amplituda se s časem mění (např. $e^{-\delta t} \cdot U_m$),
5. vlastní (též volné) – vlastní úhlový kmitočet $\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$,
6. vynucené (nucené) – kmitočet vnějšího (budícího) generátoru ω

PE5.4.1 Kmitavý obvod

Těž rezonanční (oscilační) obvod představuje elektromagnetický systém. Ten může být sestaven seriovým (paralelním) uspořádáním prvků R, L, C. Při modelování činnosti jevů v kmitavém obvodu je potřeba vzít v úvahu, že na rozdíl od kapacitoru, u něhož lze ztráty zanedbat, je induktor vinut z vodiče, jehož el. odpor zanedbat většinou nelze.

Pro obecný popis proto je vhodnější volit obvod RLC, nikoliv pouze LC.



Obr. 5.4.1.1 K podmínkám kmitání

V poloze 1 jsou definovány počáteční – nulové podmínky. Při přepnutí do polohy 2 nastane nabití RLC ze zdroje napětí $U_0 = konst.$

1a Proces nabíjení: Přepnutím do polohy 2 při průtoku el. proudu lze pro napětí na prvcích s využitím 2. Kirchhoffova zákona psát $u_L + u_R + u_C = U_0$. Po dosazení dostaneme

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = U_0.$$

Dostali jsme tvar lineární a nehomogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty R, L, C. Úpravou časovou derivací dostaneme

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

K této diferenciální rovnici se hledá řešení (integrál), přičemž vliv pravé strany se pro případ $U_0 = konst.$ představuje přičtení U_0 k obecnému řešení průběhu napětí na kapacitoru $u_C(t)$.

Časový průběh napětí na kapacitoru je tvaru

$$u_C(t) = U_0 \left[1 - e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_v t - \varphi) \right],$$

kde činitel tlumení je $\delta = \frac{R}{2L}$, vlastní kmitočet RLC obvodu je $\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, rezonanční kmitočet LC obvodu je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}.$$

2a Proces vybíjení: Při zpětném přepnutí z polohy 2 do polohy 1 lze s využitím 2. Kirchhoffova zákona pro napětí na prvcích psát $u_L + u_R + u_C = 0$. Po dosazení dostaneme

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = 0.$$

Dostali jsme tvar lineární a homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty R, L, C. Úpravou časovou derivaci dostaneme

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

K této diferenciální rovnici se hledá řešení (integrál), přičemž vliv pravé strany zde není.

Poznámka

Protože v obou případech jsou lineární diferenciální rovnice 2. řádu shodné, budou zřejmě shodná i jejich obecná řešení. Např. časový průběh napětí na kapacitoru je tvaru

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_v t - \varphi).$$

Člen $e^{-\delta t}$ udává tlumené kmitání.

1b Proces nabíjení: Přepnutím do polohy 2 při průtoku el. proudu lze pro napětí na prvcích s využitím 2. Kirchhoffova zákona psát $u_L + u_R + u_C = u(t)$. Po dosazení dostaneme

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = u(t).$$

Dostali jsme tvar lineární a nehomogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty R, L, C. Na pravé straně již není časově nezávislý parametr, nýbrž časově proměnný, většinou harmonického průběhu, např. tvaru

$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega_2 t \pm \varphi)$, kde ω_2 je kruhový kmitočet budicího harmonického signálu, $\pm \varphi$ je časový předstih nebo zpoždění vůči zvolenému počátku $t = 0$.

Obecné řešení je v tomto případě složitější (viz Nucené kmitání PE5.4).

PE5.4.2 Elektrická rezonance

Jde o jev v RLC obvodu, kdy dochází k navýšení (nakmitání, převýšení) napětí, převyšující budicí napětí U_0 .

El. rezonance je jevem kmitočtově závislým. Při el. rezonanci v RLC obvodu platí $\sum X = 0$, tj. dochází ke kompenzaci reaktančních složek X_L, X_C .

Poznámka

Rezonance není pouze jevem vyskytujícím se v el. obvodech, nýbrž je obecným fyzikálním jevem. Viz též PE5.1.10.

PE5.4.3 Parametrická rezonance

Udrží v soustavě kmitání s využitím časových změn vnitřního parametru. Parametrická rezonance nastává při kmitočtu $\omega_p = 2\omega$, kde ω je kmitočet změn parametru $L(t), C(t)$.

Při parametrické rezonanci lze docílit zvětšení amplitudy kmitů, ale nelze docílit změnou parametru $L(t), C(t)$ rozkmitání z klidového stavu. (viz kap. 2.6 Parametrické generátory)

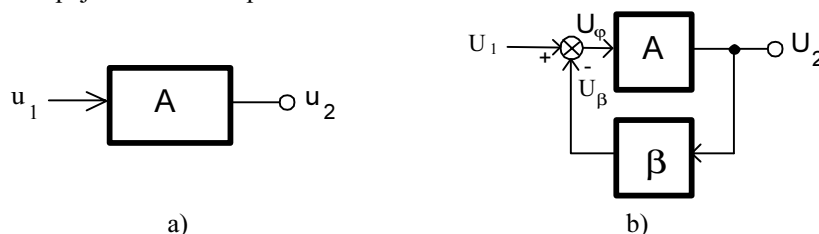
PE5.5 Samovolné kmitání v RLC obvodu [6]

V předchozí kapitole bylo ukázáno, jaké je potřeba splnit podmínky, aby hodnoty ustálených amplitud byly maximální. Kmitání v RLC obvodu může být tlumené, když dodaná vst. energie je menší než je energie v obvodu spotřebovaná. Aby tomu tak nebylo a ustálené amplitudy kmitání měly konstantní hodnoty, musí platit rovnost mezi energiemi dodanou a spotřebovanou v RLC obvodu.

V elektrotechnické praxi se uvedený problém řeší např. zavedením kladné zpětné vazby v obvodu.

PE5.5.1 Zpětná vazba

Uvažujme antiparalelní zapojení zesilovače podle obr.



Obr. PE5.5.1.1 Blokové zapojení zesilovače, a) bez zpětné vazby, b) se zpětnou vazbou

Kde A je napěťový přenos zesilovače bez zp. vazby (v přímé větvi), β je přenos napětí ve zpětné vazbě zesilovače.

Předpokládejme harmonický vstupní signál tvaru $u_1(t) = U_{1m}e^{j\omega t}$.

Při zavádění zpětné vazby nelze opomíjet kmitočtové vlastnosti zesilovače, jeho kmitočtovou závislost zesílení a přenosu ve zpětné vazbě. Necht' jsou přenosy tvaru

$$A(j\omega) = |A(\omega)| \cdot e^{j\varphi_A}$$

$$\beta(j\omega) = |\beta(\omega)| \cdot e^{j\varphi_\beta}$$

Zesílení s kladnou zpětnou vazbou po dosazení je tvaru

$$A(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{A(j\omega)}{1 - \beta(j\omega) \cdot A(j\omega)},$$

kde U_1 , U_2 jsou efektivními hodnotami vst. a výst. napětí. Pro aplikaci je důležitá hodnota jmenovatele.

Z posledního vztahu platí, že zesilovač bude

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| a) stabilní | $1 - \beta \cdot A > 0$, |
| b) na mezi stability | $1 - \beta \cdot A = 0$, |
| c) nestabilní | $1 - \beta \cdot A < 0$. |

Stabilním chováním zesilovače se rozumí takové, kdy pro malé změny $\Delta u_1(t)$, které časem zaniknou, způsobí na výstupu odezvu, jež také zanikne. Není-li tomu tak (odezva nezanikne), je zesilovač nestabilní.

Má-li zesilovač pracovat jako stabilní dvojbran, nesmí být překročena podmínka meze stability.

$$1 = |\beta(\omega)| \cdot |A(\omega)|$$

Meze stability jsou po dosazení

$$0 = \varphi_A + \varphi_\beta$$

Vztahy pro meze stability udávají amplitudovou a fázovou podmínku činnosti další třídy el. obvodů – generátorů (oscilátorů), tj. obvodů, které využívají kladné zpětné vazby.

V elektronice se obvodů s kladnou zp. vazbou – oscilátorů využívá většinou jako zdrojů periodických signálů. V tom případě je důležitým parametrem kmitočet a výstupní amplituda a jejich stability v závislosti na čase a změnách podmínek.

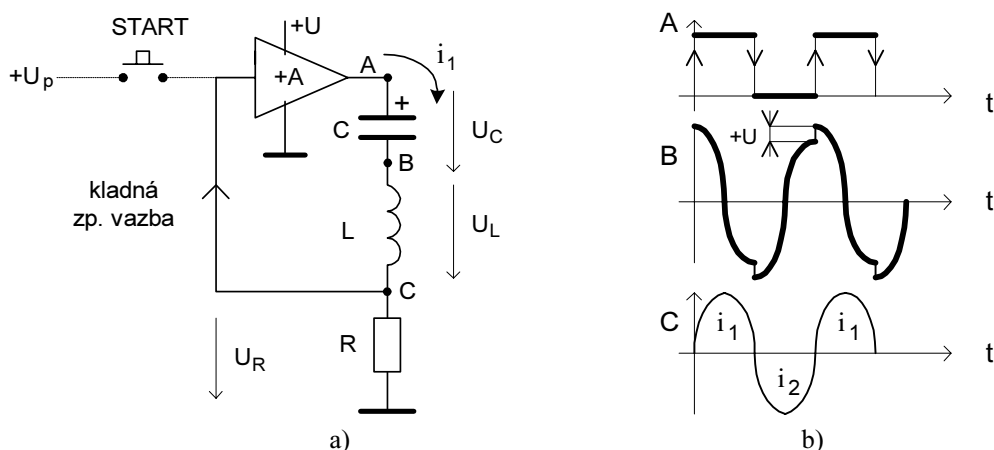
Vlastnosti zesilovačů se zápornou zpětnou vazbou tvoří základ nauky o regulačních obvodech v automatické regulaci.

PE5.5.2 RLC oscilátor s automatickým doladováním

V této podkapitole bude sledován případ RLC oscilátoru pro aplikaci jako VN zdroje.

a) RLC oscilátor se zesilovačem s kladným zesílením

Zesílení zesilovače A uvažujme takové hodnoty, že pro lib. malé vst. napětí se výstup dostane do max. hodnoty U_0 . Pracuje tedy ve funkci napěťového komparátoru. Uvažujme zapojení podle následujícího obr.



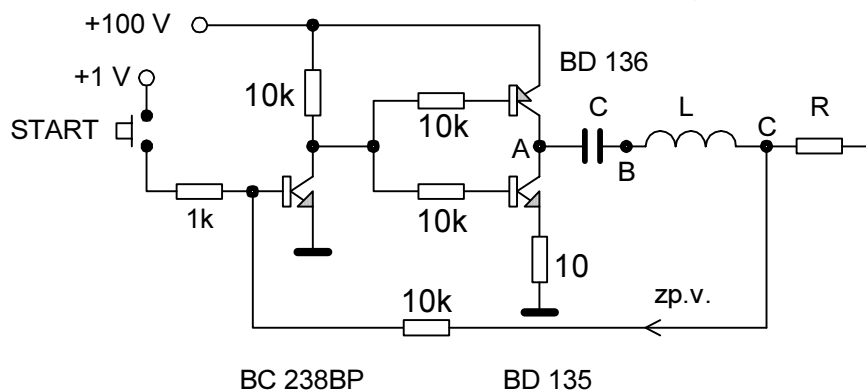
Obr. PE5.5.2.1 a) Principiální zapojení *RLC* oscilátoru se zesilovačem s kladným zesílením a s proudovou zp. vazbou
b) časové průběhy v obvodu

Předpokládejme, že po připojení k napájení bude výst. napětí zesilovače $U_0 = 0$ (bod A). Takovéto zapojení oscilátoru se samo nerozkmitá. Je potřeba z pomocného zdroje napětí dodat spouštěcí impuls. To se provede stlačením tlačítka START. Výstup zesilovače překlápí do stavu $U_0 = +U$. Nabíjecí proud $i_1 > 0$ vytvoří úbytky napětí podle obr.

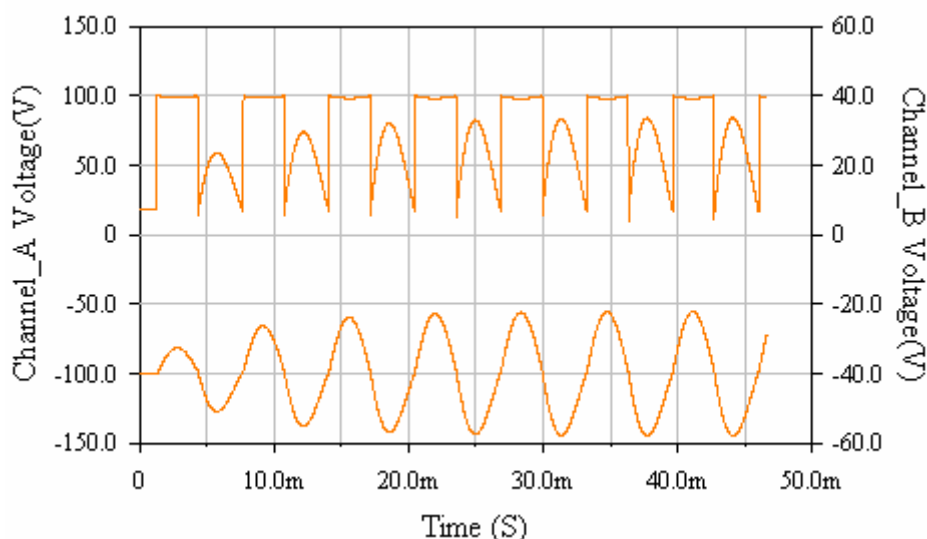
Po nabití kapacitoru se proud v obvodu zmenší na $i_1 = 0$. Výstup zesilovače přejde do stavu $U_0 = 0$. Začne proces vybíjení. Proud v obvodu bude $i_2 < 0$, má tedy opačný směr než proud i_1 . Napětí $u_R < 0$ bude držet výstup zesilovače ve stavu $U_0 = 0$ tak dlouho, až bude $i_2 = 0$. Vlivem toho, že je splněna podmínka kmitání, tj. že platí pro diskriminant $D < 0$, proud v obvodu překmitne do směru $i_1 > 0$. Tím dojde opět k překlapaní výstupu zesilovače do stavu $U_0 = +U$. V okamžicích překlápění zesilovače dochází na časovém průběhu k přičtení (odečtení) výst. napětí zesilovače, které je $U_0 = +U$, čímž na časovém průběhu napětí induktoru vznikne skoková změna. Začne další perioda. Vzniklé zkreslení ale pro aplikace oscilátoru jako zdroje VN není na závadu.

Příklad

Uvažujme zapojení podle následujícího obr. s hodnotami kmitavého obvodu $C = 1 \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ H}$, $R = 100 \Omega$.

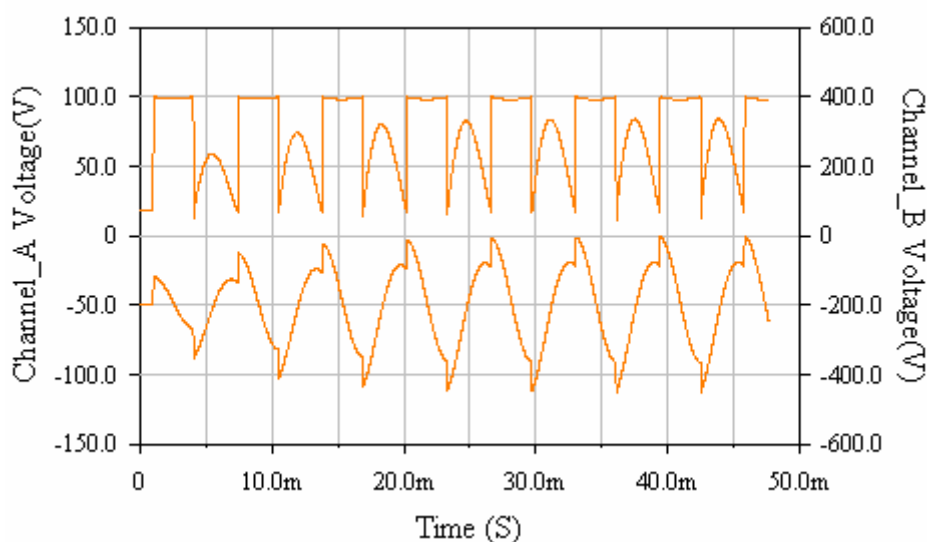


Obr. PE5.5.2.2 Ověřovací zapojení *RLC* oscilátoru s komplementárním výstupem zesilovače



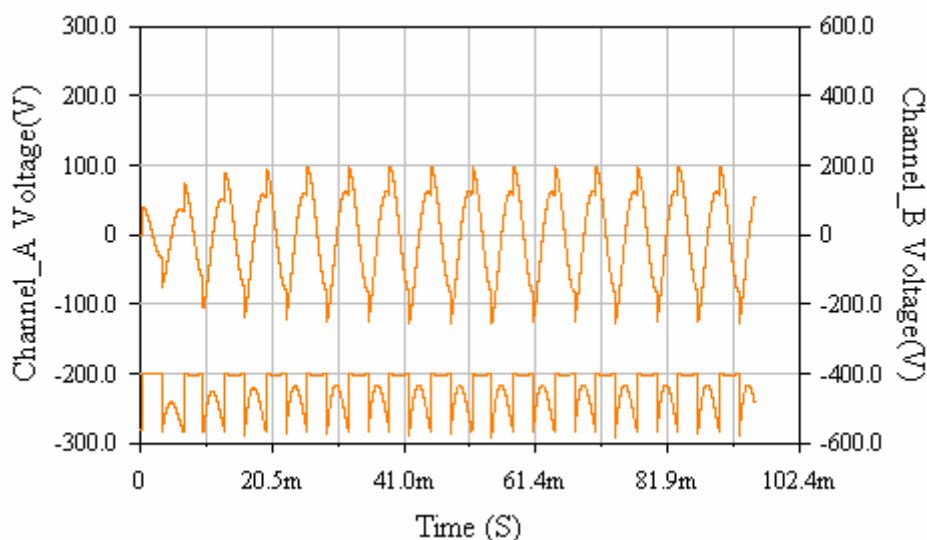
Obr. PE5.5.2.3 Kanál A – časový průběh v bodu A – výstup zesilovače
 Kanál B – časový průběh v bodu C – nárůst proudu v obvodu RLC (posunuto o -40 V)

Z časového průběhu proudu v obvodu je vidět jeho nárůst a skutečnost, že fáze mezi vst. napětím RLC obvodu (bod A) a proudem je $\varphi = 0$, což se očekávalo. Je také vidět, že odpor v emitoru BD135 (příp. v emitoru BD136) zvyšuje výst. odpor zesilovače, což ukazuje průběh napětí ve stavu sepnutí. Odpor v emitoru je ochranný a slouží proti případnému sepnutí obou tranzistorů NPN i PNP současně.



Obr. PE5.5.2.4 Kanál A – časový průběh v bodu A – výstup zesilovače
 Kanál B – časový průběh v bodu B – nárůst napětí na induktoru (posunuto o -200 V)

Na časovém průběhu napětí na induktoru je ale vidět, že v maximech má předpokládanou skokovou změnu.



Obr. PE5.5.2.5 Kanál A – časový průběh v bodu A – výstup zesilovače (posunutý o -300 V)
 Kanál B – Časový průběh v bodu B – nárůst napětí na induktoru až do ustálení

Z časového průběhu na induktoru je vidět, že jeho nakmitaná a ustálená max. hodnota dosáhla dvakrát vyšší hodnoty než je vst. hodnota na RLC obvodu. Přepínací kmitočet činí $f \approx 160\text{ Hz}$, čemuž odpovídá kruhový kmitočet

$$\omega \approx 10^3\text{ s}^{-1}. \text{ Činitel jakosti v RLC má být } Q = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega \cdot L}{R} = \frac{10^3 \cdot 1}{10^2} = 10.$$

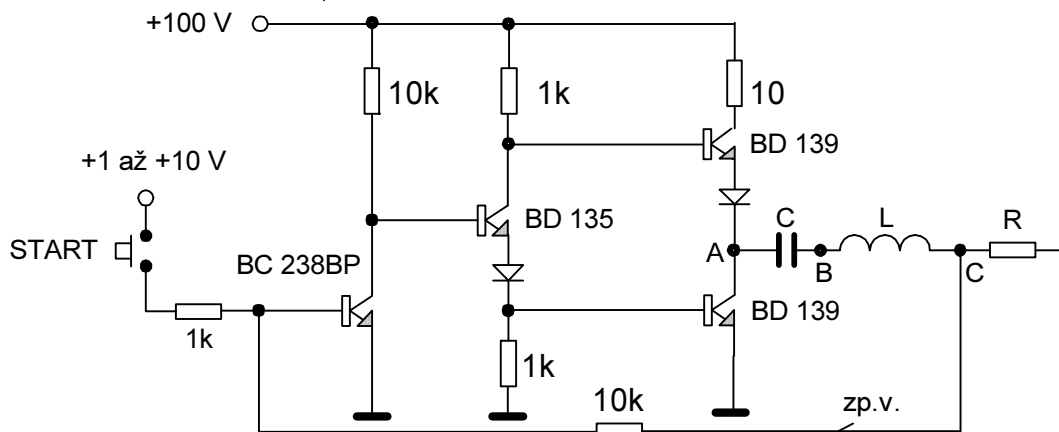
Poznámka

Parametry použitého zesilovače nejsou sice optimální, ale ukázaly funkčnost navrženého RLC oscilátoru. Zvětšení převýšení lze dosáhnout použitím menší hodnoty odporu v RLC obvodu. Při použití $R = 10\ \Omega$ bylo dosaženo převýšení cca $10\times$, což odpovídá předpokládané hodnotě výst. odporu zesilovače.

Důležitý je ale fakt, že při změně parametrů L , C dochází k aut. změně kmitočtu spínání zesilovače, tj. že i při malých změnách L , C bude docházet k aut doladování obvodu, což je žádoucí.

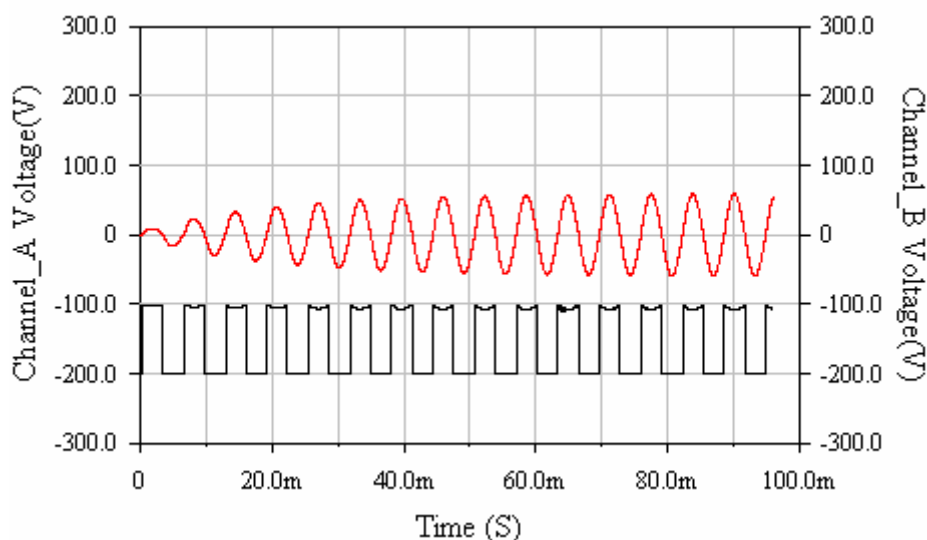
Příklad

Uvažujme zapojení zesilovače s kladným zapojením pracující na výstupu v jedné polaritě podle následujícího obr. s hodnotami kmitavého obvodu $C = 1\ \mu\text{F}$, $L = 1\text{ H}$, $R = 100\ \Omega$.

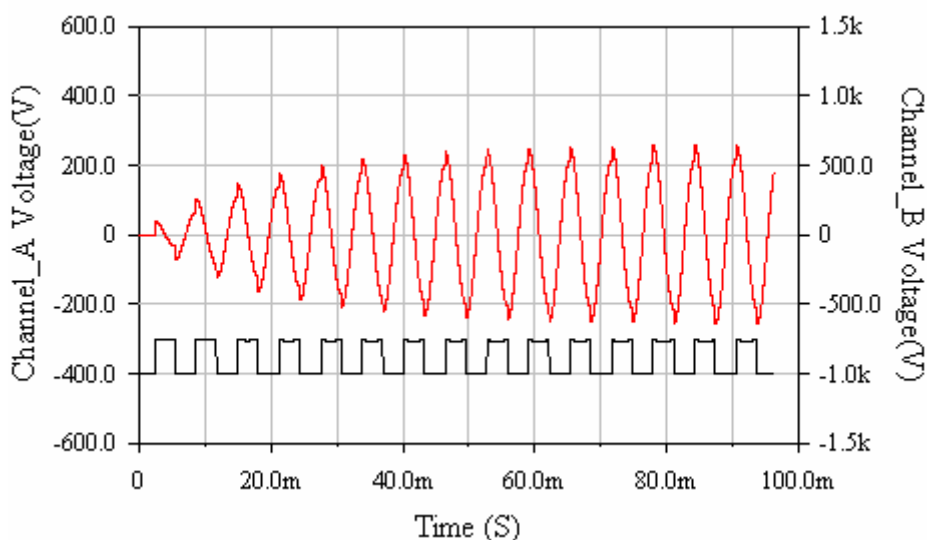


Obr. PE5.5.2.6 Ověřovací zapojení RLC oscilátoru s výstupem zesilovače NPN-NPN

Zesilovač je i v tomto případě volen s kladným zesílením. Použité diody zabráňují příp. přepólování přechodů BE. Použité tranzistory jsou všechny typu NPN. Sledovány budou časové průběhy v kmitavém obvodu RLC.



Obr. PE5.5.2.7 Kanál A – časový průběh v bodu A – výstup zesilovače (posunutý o -200 V)
 Kanál B – časový průběh v bodu B – nárůst proudu na rezistoru $R = 100\ \Omega$ až do ustálení



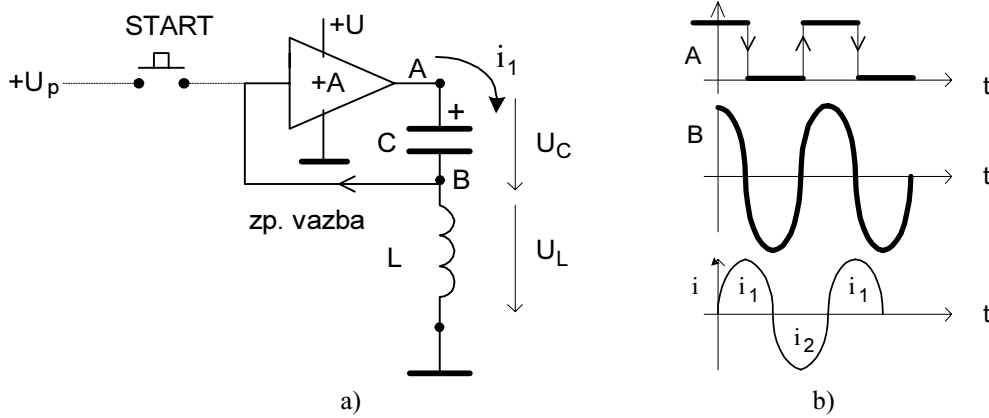
Obr. PE5.5.2.8 Kanál A – časový průběh v bodu A – výstup zesilovače (posunutý o -400 V)
 Kanál B – časový průběh v bodu B – nárůst napětí na induktoru $L = 1\text{ H}$ až do ustálení

Jak je vidět z časových průběhů průběh napětí na induktoru je stále zkreslený. Jeho převýšení činí asi $7\times$. Tzn. že vnitřní odpor zesilovače je ve srovnání s předchozím zapojením menší.

Dalším řešením bude zapojení s kladným zesílením, ale zp. vazbu volíme napěťovou podělením fázově posunutého napětí na induktoru. V tomto případě není zapotřebí již použít vnějšího sériového odporu v RLC obvodu. Zlepší se tím převýšení i energetická účinnost zapojení.

Použití kladné zp. vazby napěťové

Principiální zapojení RLC oscilátoru ukazuje následující obr.



Obr. PE5.5.2.9 a) Principiální zapojení RLC oscilátoru se zesilovačem s kladným zesílením a s napětovou zp. vazbou
b) časové průběhy v obvodu

Nechť po zapnutí je výstup zesilovače ve stavu $U_0 = 0$ (bod A). Takového zapojení oscilátoru se samo nerozkmitá. Je potřeba z pomocného zdroje napětí dodat spouštěcí impuls. To se provede stlačením tlačítka START. Výstup zesilovače překlopí do stavu $U_0 = +U$. Začne nabíjení kapacitoru proudem i_1 . Nabíjecí proud $i_1 > 0$ vytvoří úbytky napětí podle obr.

Napětí na induktoru u_L „drží“ výst. napětí zesilovače ve stavu $U_0 = +U$ až do doby $u_L = 0$. Přepínání výstupu

zesilovače tedy bude záviset na časovém průběhu $u_L(t)$. Proud v obvodu bude za napětím na induktoru zpožděn o $\frac{\pi}{2}$.

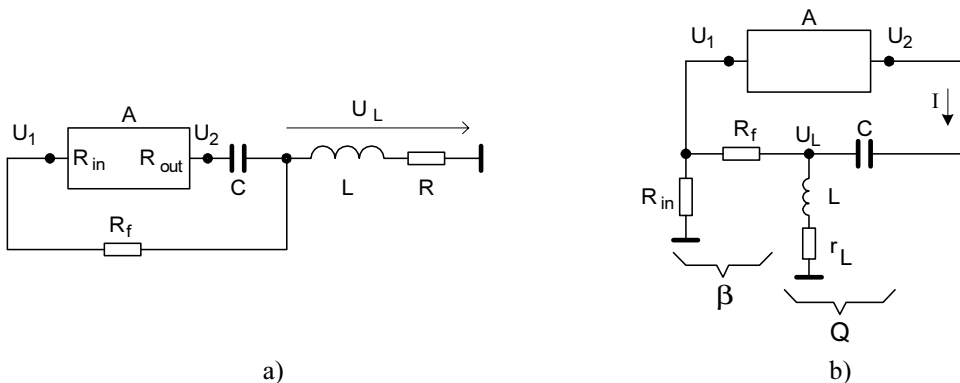
Skokové změny na časovém průběhu $u_L(t)$ nejsou, protože přepínání zesilovače se děje ve stavu $u_L = 0$.

Max. proud v obvodu je omezen vnitřním odporem zesilovače a odporem vinutí induktoru. Celkový odpor v RLC obvodu je proto menší, což vede na větší hodnotu převýšení a menší ztráty.

Zapojení je proto vhodnější pro větší výkony.

Orientační výpočet

Vyjdeme z blokového zapojení RLC oscilátoru, které ale přesněji simuluje reálné podmínky.



a)
Obr. PE5.5.2.10 a) Blokové zapojení RLC oscilátoru,
b) překreslené zapojení na antiparalelní typ

Nechť platí $R = r_L + R_{out}$, kde r_L je ztrátový odpor induktoru, R_{in} , R_{out} jsou vstupní a výstupní odpory zesilovače

s napětovým zesílením $A = \frac{U_2}{U_1}$, R je celkový ztrátový odpor v RLC obvodu. Pro napětí na induktoru lze psát

$U_L = X_L \cdot I$, kde při rezonanci je $I = \frac{U_2}{R}$. Po dosazení dostaneme, že $U_L = X_L \cdot \frac{U_2}{R} = Q \cdot U_2$. Dále platí

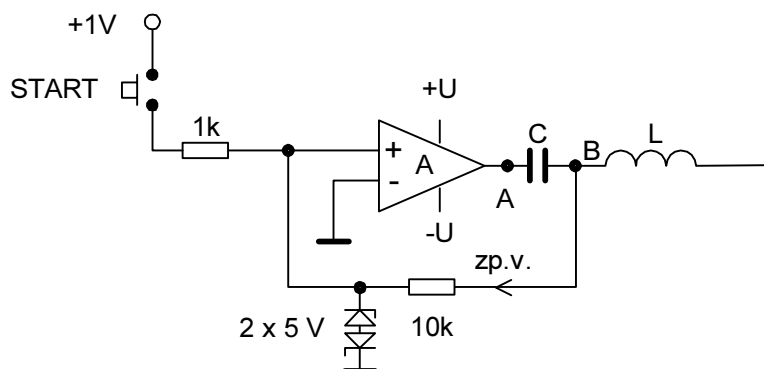
$\beta = \frac{U_1}{U_L} = \frac{R_{in}}{R_{in} + R_f} \approx \frac{R_{in}}{R_f}$. β , Q jsou přenosy ve zpětné vazbě. Platí též $U_1 = \beta \cdot U_L = \beta \cdot Q \cdot U_2$. Pro antipara-

lelní zapojení s kladnou zp. vazbou platí $A' = \frac{A}{1 - \beta' \cdot A} = \frac{A}{1 - \beta \cdot Q \cdot A}$. Pro amplitudovou podmínku rozkmitání

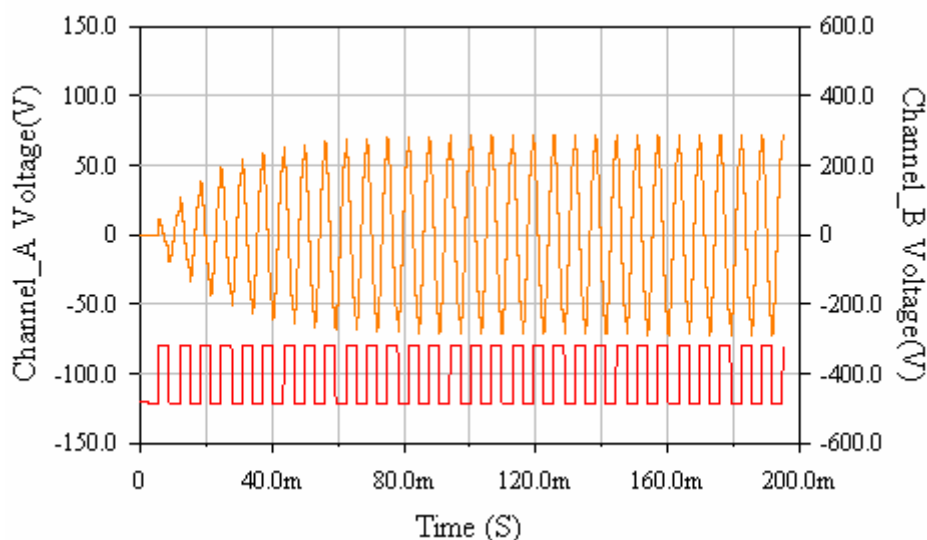
musí platit $1 - \beta \cdot Q \cdot A = 0$. Je vhodné volit $\beta \cdot Q \cdot A \geq 1$. Při volbě $\beta \cdot Q \cdot A \gg 1$ bude výstup zesilovače již pracovat ve spínacím režimu, což je žádoucí.

Příklad

Uvažujme zapojení zesilovače s kladným zesílením pracující na výstupu v obou polaritách. I v tomto případě výstup není spínán do nuly, ale do záporného napětí. Při přepnutí pak dochází k vybíjení s protiproudem. Zpětnou vazbu „vezmeme“ z napětí na induktoru. Hodnoty vnějších prvků kmitavého obvodu jsou $C = 1 \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ H}$.



Obr. PE5.5.2.11 Ověřovací zapojení RLC oscilátoru s napětíovou zpětnou vazbou



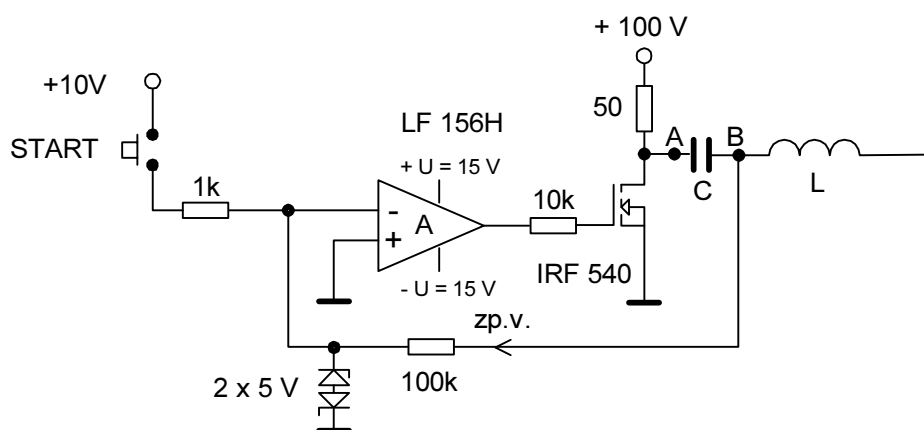
Obr. PE5.5.2.12 Kanál A – časový průběh v bodu A – výstup zesilovače (posunuto o -100 V)
Kanál B – časový průběh v bodu B – průběh napětí na induktoru $L = 1 \text{ H}$

Z časových průběhů je vidět, že vyřazením sériového odporu se zvětšilo převýšení RLC obvodu na $Q \approx 15$. Dalšímu zvětšení převýšení brání výstupní odpor zesilovače.

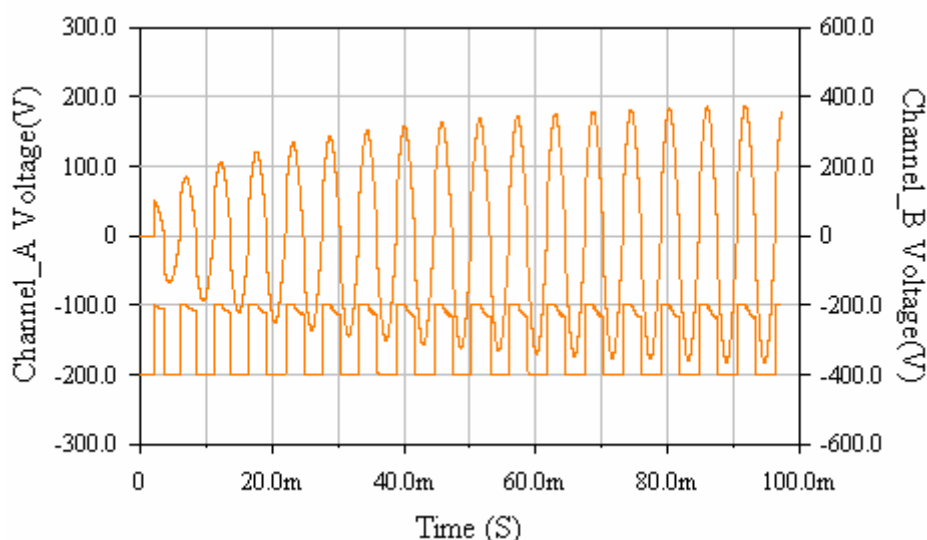
Aplikaci zapojení na VN zdroj provedeme tak, že místo induktoru použijeme VN transformátor s převodem „nahoru“.

Příklad

Uvažujme zapojení zesilovače s kladným zesílením pracující na výstupu v jedné polaritě. Výstup OZ je posílen N-MOS tranzistorem. V tomto případě je výstup spínán do nuly. Zpětnou vazbu „vezmeme“ z napětí na induktoru. Hodnoty kmitavého obvodu jsou $C = 1 \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ H}$.

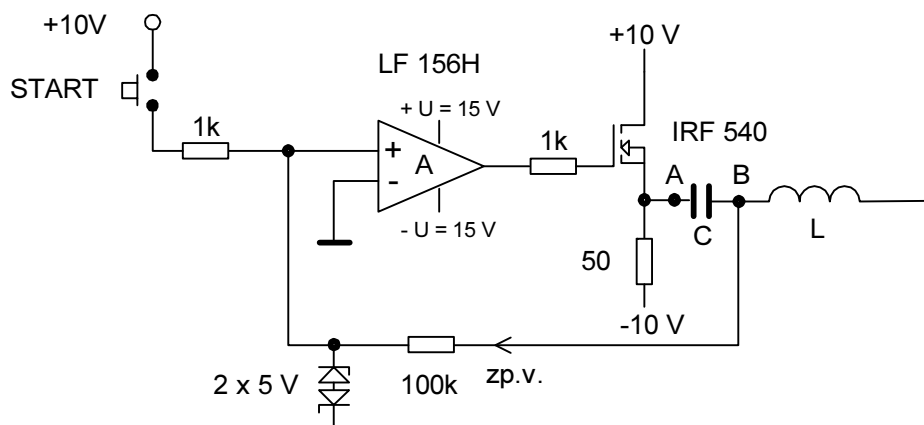


Obr. PE5.5.2.13 Ověřovací zapojení s buzením RLC MOSFET s R zátěží

Obr. PE5.5.2.14 Kanál A – časový průběh v bodu A – výstup zesilovače (posunut o -200 V)
Kanál B – časový průběh v bodu B – průběh napětí na induktoru $L = 1\text{ H}$

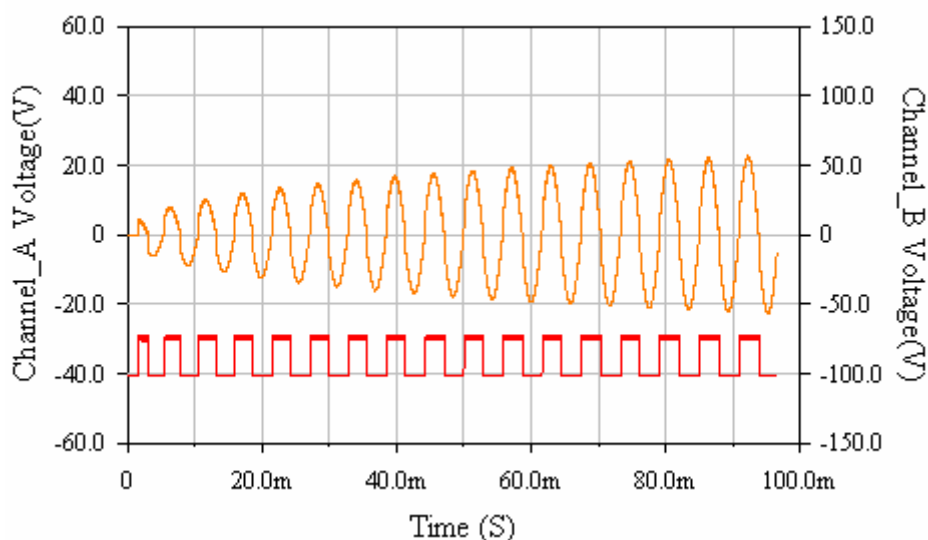
Z časového průběhu je vidět, že dosažené převýšení je asi $Q \approx 4$. Při použití bipolárního Darlingtonu je dosažené převýšení asi $Q \approx 3$. Projeví se tu větší výst. odpor.

Snaha po zmenšení výstupního odporu vedla na použití N-MOS emitorového sledovače, jak je ukázáno na následujícím obr.



Obr. PE5.5.2.15 Ověřovací zapojení s výstupem emitorovým sledovačem s MOSFET a napětovou zp. vazbou

Hodnoty napájecích napětí pro OZ a N-MOS tranzistor jsou voleny tak, aby bylo zajištěno dokonalé otevření a zavření N-MOS tranzistoru z výstupu OZ.



Obr. PE5.5.2.16 *Kanál A – časový průběh v bodu A – výstup zesilovače (posunuto o -40 V)*
Kanál B – časový průběh v bodu B – průběh napětí na induktoru $L = 1\text{ H}$

Z časového průběhu je vidět, že dosažené převýšení je asi $Q \approx 5$.

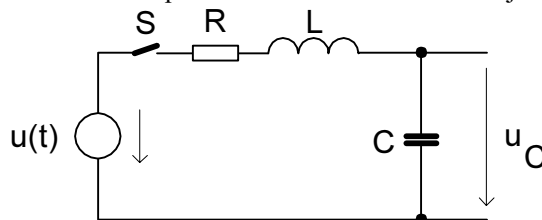
Poznámka

Ověřovány byly ještě další varianty zapojení RLC oscilátorů se zesilovači s kladným zesílením a s napěťovou zp. vazbou. Vzhledem k tomu, že nedávaly jednoznačné výsledky, nejsou uváděny.
 RLC oscilátor se zesilovačem se záporným zesílením viz kap. 5.10.

PE5.6 Nucené kmitání v RLC obvodu [2]

PE5.6.1 Sériový RLC obvod s cizím buzením

Sledováno bude chování parametrů RLC obvodu při harmonickém buzení. Uvažujme zapojení podle následujícího obr.



Obr. PE5.6.1.1 Cizí buzení sériového RLC obvodu

Nechť časový průběh budícího zdroje je tvaru $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, kde α udává fázový posun napětí $u(t)$ v okamžiku $t = 0$. Uvažujme situaci, kdy v čase $t > 0$ je zdroj $u(t)$ připojen k obvodu.

Pro obvod lze napsat s užitím 2. Kirchhoffova zákona vztah $-u(t) + u_R + u_L + u_C = 0$. Po dosazení dostaneme

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = u(t). \text{ Protože proud v obvodu prochází kapacitou } C, \text{ dosadíme pro proud výraz } i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Po dosazení dostaneme $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = U_m \cdot \cos(\omega t + \alpha)$. Rovnici podělíme součinem LC a upravíme. Dostaneme

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \left(\frac{U_m}{LC} \right) \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Vztah vyjadřuje děj v RLC obvodu po připojení budícího zdroje $u(t)$. Z matematického pohledu jde o nehomogenní lin. dif. rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Taková rovnice má obecné řešení tvaru $u_C = u_{C1} + u_{C2}$, kde u_{C1} je řešením homogenní rovnice (bez pravé strany), u_{C2} je řešením včetně pravé strany. Zajímá nás nejprve u_{C2} .

Z učebnic vyšší matematiky lze nalézt, že obecné řešení homogenní rovnice pro komplexní kořeny (kmitání) RLC obvodu je tvaru $u_{C1} = e^{-\delta t} \cdot (K_1 \cdot \cos \omega_0 t + K_2 \cdot \sin \omega_0 t)$, partikulární řešení, u níž na pravé straně je harmonická funkce je obecné řešení tvaru $u_{C2} = K_a \cdot \sin(\omega t + \alpha) + K_b \cdot \cos(\omega t + \alpha)$.

Poznámka

Sledujme existenci dvou různých úhlových kmitočtů. Úhlový kmitočet ω je vlastní kmitočet RLC obvodu, kdežto ω je kmitočet budícího signálu (napětí) $u(t)$. Pro VN aplikace uvažujeme jev kmitavý, kdy pro vlastní kmitočet RLC platí

$$\omega_v = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Úkolem je nalezení konstant K_a , K_b . Ty dostaneme, když obecné řešení u_{C2} dosadíme do nehom. lin. dif. rovnice. K tomu budeme potřebovat časové derivace u_{C2} .

$$\frac{du_{C2}}{dt} = \omega \cdot K_a \cdot \cos(\omega t + \alpha) - \omega \cdot K_b \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} = -\omega^2 \cdot K_a \cdot \sin(\omega t + \alpha) - \omega^2 \cdot K_b \cdot \cos(\omega t + \alpha). \text{ Vztahy dosadíme a separujeme jednotlivé členy}$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \cdot K_a \cdot \sin(\omega t + \alpha) - \omega^2 \cdot K_b \cdot \cos(\omega t + \alpha) + \frac{R}{L} \left[\omega \cdot K_a \cdot \cos(\omega t + \alpha) - \omega \cdot K_b \cdot \sin(\omega t + \alpha) \right] + \\ & + \frac{1}{LC} \cdot \left[K_a \cdot \sin(\omega t + \alpha) + K_b \cdot \cos(\omega t + \alpha) \right] = \left(-\omega^2 \cdot K_a - \frac{\omega R}{L} \cdot K_b + \frac{K_a}{LC} \right) \cdot \sin(\omega t + \alpha) + \\ & + \left(-\omega^2 \cdot K_b + \frac{\omega R}{L} \cdot K_a + \frac{K_b}{LC} \right) \cdot \cos(\omega t + \alpha) = \left(\frac{U_m}{LC} \right) \cdot \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Protože na pravé straně je pouze funkce \cos , bude výraz v závorce u funkce \sin roven nule. Po dosazení

$$\left(-\omega^2 \cdot K_a - \frac{\omega R}{L} \cdot K_b + \frac{K_a}{LC} \right) = 0. \text{ Člen v závorce u funkce } \cos \text{ bude roven členu na pravé straně, tj. bude platit, že}$$

$$\left(-\omega^2 \cdot K_b + \frac{\omega R}{L} \cdot K_a + \frac{K_b}{LC} \right) = \left(\frac{U_m}{LC} \right). \text{ Dostali jsme tedy dvě rovnice o dvou neznámých } K_a, K_b.$$

Zavedeme si zjednodušení $\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) = -\frac{\omega}{L} \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -\frac{\omega}{L} \cdot X$, kde X je celková reaktance obvodu. Po dosazení

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{L} \cdot X \cdot K_a - \frac{\omega}{L} \cdot R \cdot K_b &= 0 & X \cdot K_a + R \cdot K_b &= 0 \\ \text{do obou rovnic dostaneme} & & \text{a po úpravě} & R \cdot K_a - X \cdot K_b = \frac{U_m}{\omega C} \end{aligned}$$

$$-\frac{\omega}{L} \cdot X \cdot K_b + \frac{\omega}{L} \cdot R \cdot K_a = \frac{U_m}{LC}$$

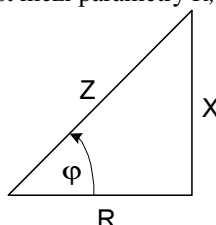
tučným způsobem nebo pomocí determinantů. Např. z první rovnice dosadíme do druhé rovnice za $K_b = -\frac{X}{R} \cdot K_a$ a dostaneme $R \cdot K_a - X \cdot \left(-\frac{X}{R}\right) \cdot K_a = \frac{U_m}{\omega C}$, z čehož po zjednodušení typu $Z^2 = R^2 + X^2$, což představuje celkovou impedanci RLC obvodu, dostaneme $K_a = \frac{R}{\omega C \cdot Z^2} \cdot U_m$. Dosadíme do $K_b = -\frac{X}{R} \cdot K_a$ a dostaneme

$$K_b = -\frac{X}{R} \cdot \frac{R}{\omega C \cdot Z^2} \cdot U_m = \frac{-X}{\omega C \cdot Z^2} \cdot U_m.$$

Získané tvary pro koeficienty K_a, K_b dosadíme do obecného řešení a dostaneme

$$u_{C2} = \frac{R}{\omega C \cdot Z^2} \cdot U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha) - \frac{X}{\omega C \cdot Z^2} \cdot U_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) = \frac{U_m}{\omega C \cdot Z^2} \cdot [R \cdot \sin(\omega t + \alpha) - X \cdot \cos(\omega t + \alpha)].$$

Výraz lze dále upravit, uvědomíme-li si souvislost mezi parametry R, X, Z . Použijeme k tomu impedanční trojúhelník



Obr. PE5.6.1.2 Impedanční trojúhelník

Z obr. platí pro reálnou část impedance $R = Z \cdot \cos \varphi$, pro imaginární část $X = Z \cdot \sin \varphi$. Dosadíme do vztahu pro u_{C2}

$$u_{C2} = \frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot [\cos \varphi \cdot \sin(\omega t + \alpha) - \sin \varphi \cdot \cos(\omega t + \alpha)].$$

Výraz dále upravíme použitím vztahu z matematických tabulek $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$. Po dosazení dostaneme

$$u_{C2} = \frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi).$$

Dosadíme do vztahu pro obecný integrál diferenciální rovnice. Uvažujeme kmitavý stav RLC obvodu, takže použijeme obecné řešení pro u_{C1} ve tvaru $u_{C1} = e^{-\delta t} \cdot (K_1 \cdot \cos \omega_v t + K_2 \cdot \sin \omega_v t)$.

$$u_C = u_{C1} + u_{C2} = u_{C1} + \frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi) = e^{-\delta t} \cdot (K_1 \cdot \cos \omega_v t + K_2 \cdot \sin \omega_v t) + \frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi).$$

Zbývá nyní vyřešit konstanty K_1, K_2 . Ty lze stanovit z počátečních podmínek, tj. pro $t = 0, i = 0, u_C = 0$. Po dosazení počátečních podmínek dostaneme $K_1 = -\frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\alpha - \varphi)$. Po dosazení

$$u_C = e^{-\delta t} \cdot \left(-\frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot \cos \omega_v t + K_2 \cdot \sin \omega_v t \right) + \frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi).$$

Proud v RLC obvodu musí procházet kapacitorem, proto bude platit $i(t) \equiv i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$. Dosadíme do předchozí rovnice a derivujeme podle času

$$\begin{aligned} i(t) &= -\delta \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[-\frac{U_m}{\omega \cdot Z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot \cos \omega_v t + C \cdot K_2 \cdot \sin \omega_v t \right] + e^{-\delta t} \cdot \left[\frac{\omega_v \cdot U_m}{\omega \cdot Z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot \sin \omega_v t + \omega_v \cdot C \cdot K_2 \cdot \cos \omega_v t \right] + \\ &+ \frac{U_m}{Z} \cdot \cos(\omega t + \alpha - \varphi). \end{aligned}$$

Pro stanovení K_2 dosadíme do počátečních (mezních) podmínek. Pro $t = 0 \rightarrow i = 0$. Po dosazení dostaneme

$$0 = \frac{\delta \cdot U_m}{\omega \cdot Z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) + \omega_v \cdot C \cdot K_2 + \frac{U_m}{Z} \cdot \cos(\alpha - \varphi), \text{ z čehož pak}$$

$$K_2 = -\frac{U_m}{\omega_v \cdot C \cdot Z} \cdot \left[\frac{\delta}{\omega} \cdot \sin(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi) \right].$$

Dosadíme K_2 do vztahu pro časovou závislost proudu v RLC obvodu s nuceným buzením

$$i(t) = -\delta \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[-\frac{U_m}{\omega \cdot Z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot \cos \omega_v t - \frac{U_m}{\omega_v \cdot C \cdot Z} \cdot \left[\frac{\delta}{\omega} \cdot \sin(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi) \right] \cdot \sin \omega_v t \right] + \\ + e^{-\delta t} \cdot \left[\frac{\omega_v \cdot U_m}{\omega \cdot Z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot \sin \omega_v t - \frac{U_m}{Z} \cdot \left[\frac{\delta}{\omega} \cdot \sin(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi) \right] \cdot \cos \omega_v t \right] + \frac{U_m}{Z} \cdot \cos(\omega t + \alpha - \varphi).$$

Dosadíme K_2 do vztahu pro časovou závislost napětí na kapacitoru v RLC obvodu s nuceným buzením

$$u_C(t) = e^{-\delta t} \cdot \left(-\frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \cdot \cos \omega_v t - \frac{U_m}{\omega_v \cdot C \cdot Z} \cdot \left[\frac{\delta}{\omega} \cdot \sin(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi) \right] \cdot \sin \omega_v t \right) + \frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

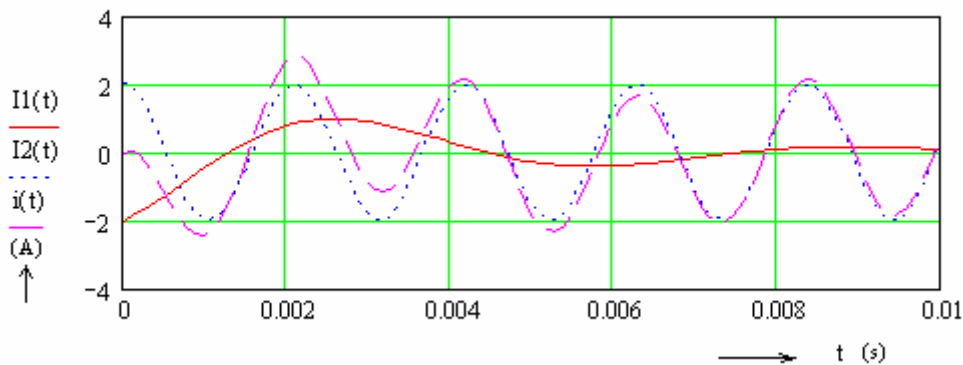
I když jsou vztahy složitější, lze z nich vysledovat, že jsou složeny ze dvou členů. První člen vyjadřuje přechodnou složku, druhý člen představuje složku po ustálení přechodného jevu.

Budeme-li uvažovat případ, kdy budící napětí připojíme k RLC obvodu, když bude platit $(\alpha - \varphi) = 0$. Časové průběhy proudu a napětí se zjednoduší na tvar

$$i(t) = -\frac{U_m}{Z} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega_v t - \frac{\delta}{\omega_v} \cdot \sin \omega_v t \right) + \frac{U_m}{Z} \cdot \cos \omega t, \\ u_C(t) = -\frac{U_m}{\omega_v \cdot C \cdot Z} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega_v t + \frac{U_m}{\omega \cdot C \cdot Z} \cdot \sin \omega t.$$

Z těchto vztahů je již zřejmé, že napětí na kapacitoru má po připojení budícího signálu dvě složky. První je charakteru tlumených kmitů o vlastním úhlovém kmitočtu RLC obvodu, která po urč. době odezní. Jde tedy o přechodný jev. Po ustálení zůstane v obvodu pouze signál budícího kmitočtu. Budeme sledovat, jak se budou časové průběhy $i(t)$, $u_C(t)$

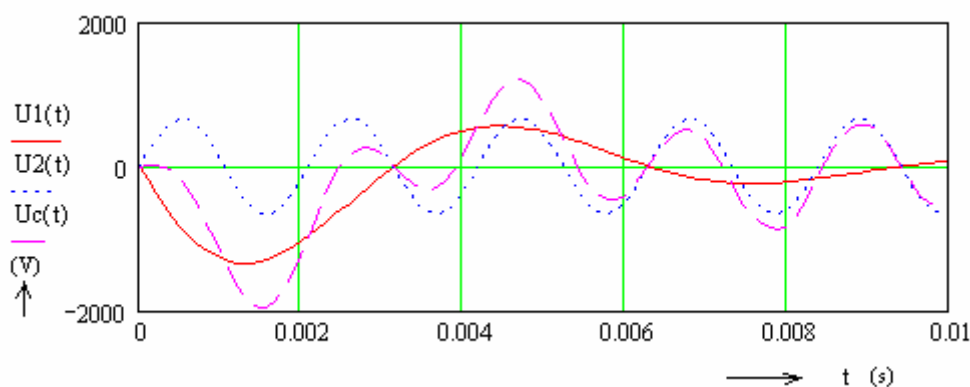
měnit, když se bude měnit poměr úhlových kmitočtů $k = \frac{\omega}{\omega_v}$, kde k je reálné kladné číslo.



Obr. PE5.6.1.3 Časové průběhy,

$I_1(t)$ je přechodná složka proudu, $I_2(t)$ je ustálená složka proudu, $i(t)$ je výsledný proud

$$\text{pro } U_m = 10 \text{ V, } R = 5 \Omega, L = 1 \text{ H, } C = 1 \mu\text{F, } \frac{\omega}{\omega_v} = 3.$$

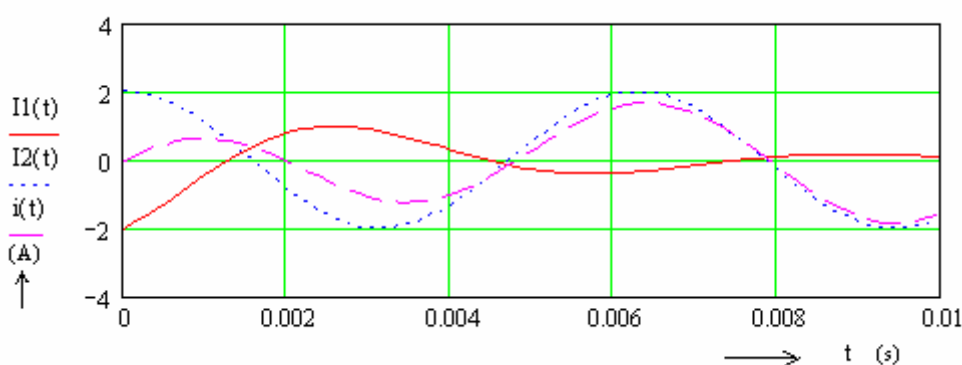


Obr. PE5.6.1.4 Časové průběhy,

$U_1(t)$ je přechodná složka napětí, $U_2(t)$ je ustálená složka napětí, $U_c(t)$ je výsledné napětí

$$\text{pro } U_m = 10 \text{ V, } R = 5 \, \Omega, L = 1 \text{ H, } C = 1 \, \mu\text{F, } \frac{\omega}{\omega_v} = 3.$$

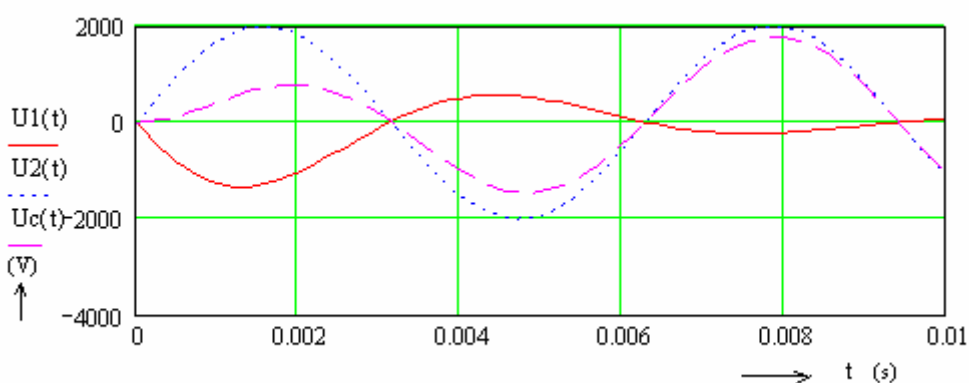
Zobrazíme si časové průběhy pro případ, kdy $k = 1$, tj. pro $\omega = \omega_v$.



Obr. PE5.6.1.5 Časové průběhy,

$I_1(t)$ je přechodná složka proudu, $I_2(t)$ je ustálená složka proudu, $i(t)$ je výsledný proud

$$\text{pro } U_m = 10 \text{ V, } R = 5 \, \Omega, L = 1 \text{ H, } C = 1 \, \mu\text{F, } \frac{\omega}{\omega_v} = 1.$$

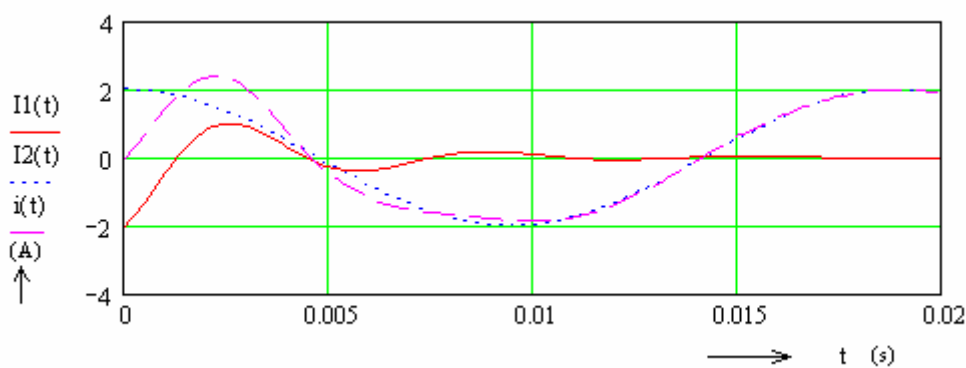


Obr. PE5.6.1.6 Časové průběhy,

$U_1(t)$ je přechodná složka napětí, $U_2(t)$ je ustálená složka napětí, $U_c(t)$ je výsledné napětí

$$\text{pro } U_m = 10 \text{ V, } R = 5 \, \Omega, L = 1 \text{ H, } C = 1 \, \mu\text{F, } \frac{\omega}{\omega_v} = \frac{1}{3}.$$

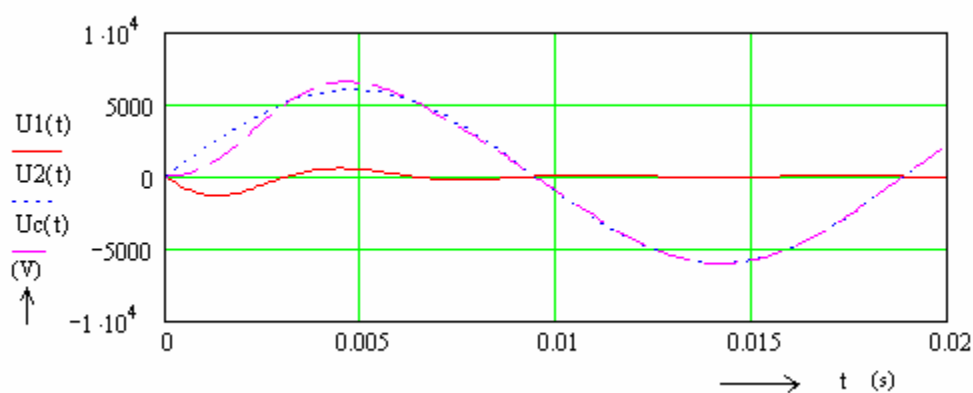
Zobrazíme si časové průběhy pro případ, kdy $k = \frac{1}{3}$, tj. pro $\omega = \frac{1}{3} \omega_v$.



Obr. PE5.6.1.7 Časové průběhy,

$I_1(t)$ je přechodná složka proudu, $I_2(t)$ je ustálená složka proudu, $i(t)$ je výsledný proud

$$\text{pro } U_m = 10 \text{ V}, R = 5 \, \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 1 \, \mu\text{F}, \frac{\omega}{\omega_v} = \frac{1}{3}.$$

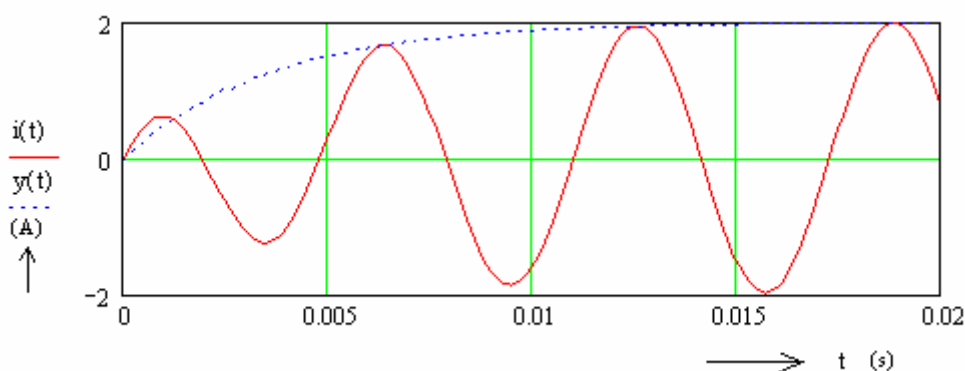


Obr. PE5.6.1.8 Časové průběhy,

$U_1(t)$ je přechodná složka napětí, $U_2(t)$ je ustálená složka napětí, $U_c(t)$ je výsledné napětí

$$\text{pro } U_m = 10 \text{ V}, R = 5 \, \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 1 \, \mu\text{F}, \frac{\omega}{\omega_v} = \frac{1}{3}.$$

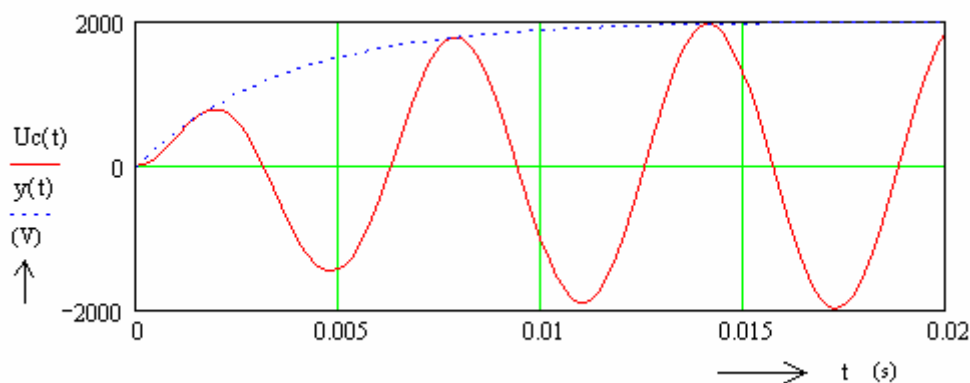
Z časových průběhů je vidět, že nejvýhodnější se jeví průběhy, když platí $k = 1$, tj. pro $\omega = \omega_v$. Budeme se proto tímto režimem blíže zabývat.



Obr. PE5.6.1.9 Časové průběhy,

$i(t)$ je výsledný proud, $y(t)$ je obalová křivka náběhu výsledného proudu

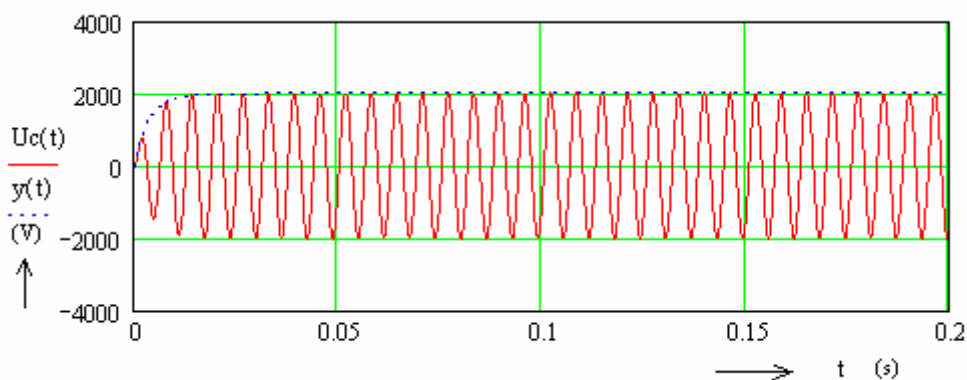
$$\text{pro } U_m = 10 \text{ V}, R = 5 \, \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 1 \, \mu\text{F}, \frac{\omega}{\omega_v} = 1.$$



Obr. PE5.6.1.10 Časové průběhy,

$U_C(t)$ je výsledné napětí na kapacitoru, $y(t)$ je obalová křivka náběhu výsledného napětí

$$\text{pro } U_m = 10 \text{ V}, R = 5 \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 1 \mu\text{F}, \frac{\omega}{\omega_v} = 1.$$



Obr. PE5.6.1.11 Časové průběhy,

$U_C(t)$ je výsledné napětí na kapacitoru, $y(t)$ je obalová křivka náběhu výsledného napětí

$$\text{pro } U_m = 10 \text{ V}, R = 5 \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 1 \mu\text{F}, \frac{\omega}{\omega_v} = 1.$$

Náběh kmitů proudu i napětí je dán tím, že amplituda vlastních kmitů se postupně zmenšuje, takže výsledný proud nebo napětí se postupně zvětšuje od nuly až do hodnoty ustáleného stavu. Obalová křivka je dána tvarem

$$u_C(t) = Q \cdot U_m \cdot (1 - e^{-\delta t}), \text{ kde } Q \text{ je činitel jakosti RLC obvodu. Pro něho platí } Q = \frac{\omega_v \cdot L}{Z} = \frac{1}{\omega_v \cdot C \cdot Z}, \text{ kde}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \text{ Při rezonanci RLC obvodu je celková impedance rovna } Z \equiv R.$$

Poznámka

Maximální hodnota nakmitaného napětí na kapacitoru je přímo úměrná činiteli jakosti Q a amplitudě budícího napětí.

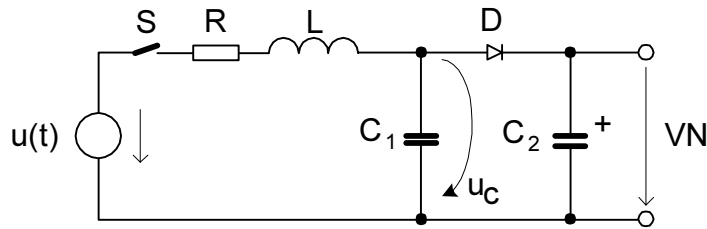
Příklad

Uvažujme parametry RLC obvodu $U_m = 10 \text{ V}$, $R = 5 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $\frac{\omega}{\omega_v} = 1$.

Při rezonanci obvodu bude $I_{\max} = \frac{U_m}{R} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$, maximum nakmitaného napětí na kapacitoru bude rovno

$$U_{C \max} = Q \cdot U_m = \frac{U_m}{\omega_v \cdot C \cdot R} \approx \frac{U_m}{\sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \cdot C \cdot R} = \frac{10}{\sqrt{10^{-6} \cdot 10^{-6}} \cdot 5} = 2 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

V praxi toto napětí budeme potřebovat „přesunout“ a současně usměrnit na výstupním kapacitoru. Způsob provedení ukazuje následující obr.



Obr. PE5.6.1.12 Zapojení pro snímání maxim nakmitaného napětí

Závěrné napětí použité diody volit pro $U_z \geq 2 \cdot U_{C_{\max}}$. Pro zajištění stálého výstupního napětí nutno dodržet podmínku, aby dodaný náboj byl roven náboji odebranému.

Poznámka

Přesun energie $W_{C1} \rightarrow W_{C2}$ je zatížen energetickou účinností 50 %.

PE5.6.2 Aperiodický stav RLC obvodu

Jde o stav kdy obvod sám již nekmitá, protože platí $(R > 2Z_0)$, kdy není splněna podmínka kmitání.

Poznámka

Parametr $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (Ω) je vlnová impedance (odpor) kmitavého obvodu.

Kořeny charakteristické rovnice jsou dva reálné různé. Mají tvar $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \beta$. Obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je tvaru $u_C = u_{C1} + u_{C2}$, kde $u_{C1} = K_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + K_2 \cdot e^{\alpha_2 t}$ je obecné řešení lineární diferenciální rovnice bez pravé strany, $u_{C2} = K_a \cdot \sin(\omega t + \alpha) + K_b \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ je obecné řešení partikulární i s pravou stranou.

Obecné řešení pro u_{C2} již bylo uvedeno ve tvaru $u_{C2} = \frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$. Po dosazení pak dostaneme

$$u_C = u_{C1} + u_{C2} = K_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + K_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + \frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi).$$

Zavedeme si zjednodušující předpoklad $(\alpha - \varphi) = 0$, čímž se nám zjednoduší obecné řešení do tvaru

$$u_C = K_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + K_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + \frac{U_m}{\omega C \cdot Z} \cdot \sin \omega t.$$

Integrační konstanty K_1, K_2 získáme dosazením do mezních (počátečních) podmínek

Pro $t = 0 \rightarrow u_C = 0$ po dosazení dostaneme

$$\text{První rovnice} \quad 0 = K_1 + K_2 \rightarrow K_2 = -K_1.$$

Protože proud RLC obvodem bude také proudem tekoucím přes kapacitor, lze psát $i(t) \equiv i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$. Provedeme proto časovou derivaci $u_C(t)$ a dostaneme

$$i(t) = C \cdot \alpha_1 \cdot K_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + C \cdot \alpha_2 \cdot K_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + \frac{U_m}{Z} \cdot \cos \omega t.$$

Druhou rovnici určíme z podmínky $t = 0 \rightarrow i(0) = 0$, kdy dostaneme

$$\text{Druhá rovnice} \quad 0 = C \cdot \alpha_1 \cdot K_1 - C \cdot \alpha_2 K_1 + \frac{U_m}{Z} \cdot \cos \omega t.$$

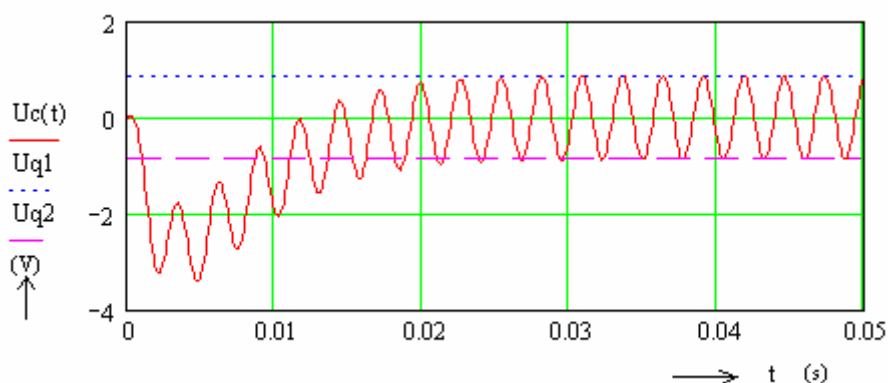
Z první a druhé rovnice stanovíme výrazy pro integrační konstanty

$$K_1 = -\frac{U_m}{C \cdot Z} \cdot \left[\frac{\cos \omega t}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \right],$$

$$K_2 = \frac{U_m}{C \cdot Z} \cdot \left[\frac{\cos \omega t}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \right].$$

Platí $(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) = e^{-\delta t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t})$. Z matematických tabulek nalezneme, že platí $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$, a po dosazení za kořeny platí, že $(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\beta$. Po dosazení a úpravě dostaneme výraz pro časový průběh napětí na kapacitoru

$$U_c(t) = \frac{U_m}{\omega \cdot C \cdot Z} \cdot \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\beta} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sinh(\beta t) \right].$$



Obr. PE5.6.2.1 Časový průběh,
 $U_c(t)$ je výsledné napětí na kapacitoru, U_{q1} , U_{q2} jsou obalové křivky ustálených amplitud ($Q \cdot U_m$)
 pro $U_m = 10 \text{ V}$, $R = 5 \cdot 10^3 \text{ } \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ } \mu\text{F}$, $\beta = 1$.

Poznámka

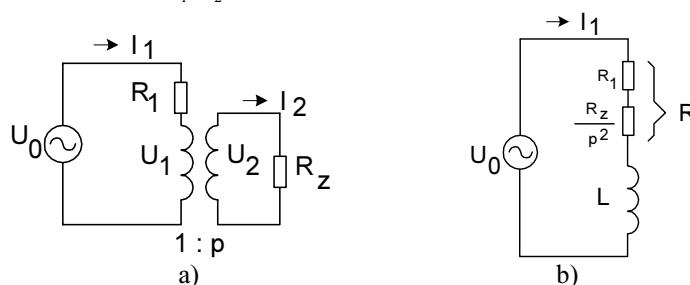
Z časových průběhů je vidět, že kmitavý režim se ustaluje bez překmitů na ustálenou amplitudu rovnou $U_q = Q \cdot U_m$, kdežto při režimu aperiodickém sice dochází k překmitům (až o 2,4násobek), ale maximální ustálená hodnota je podstatně menší, než při režimu kmitavém, daná podstatně menší hodnotou činitele jakosti Q .

Pro konstrukci VN zdrojů je proto vhodnější režim kmitavý. Režim aperiodický je vzhledem k malým hodnotám nakmitaného napětí na kapacitoru nepoužitelný.

PE5.7 Porovnání účinnosti transformátoru bez rezonance a s rezonancí

PE5.7.1 Bez elektrické rezonance

Uvažujeme ideální transformátor, u něhož $L_1, L_2 \rightarrow \infty$.



Obr. PE5.7.1.1 Základní zapojení transformátoru jako aperiodického RL obvodu a náhradní zapojení po transformaci zátěže do primáru

Odpor R_1 představuje neideální zdroj vst. signálu. Proud v primáru je $I_1 = \frac{U_0}{|Z|}$, proud v sekundáru $I_2 = \frac{U_2}{R_z}$. Necht' pro transformátor platí $P_1 = P_2$, tj. také platí $U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2$, přičemž převod $p = \frac{U_2}{U_1}$, z čehož pak $I_2 = \frac{1}{p} \cdot I_1$. Výkon v zátěži je $P_2 = R_z \cdot I_2^2 = \left(\frac{R_z}{p^2}\right) \cdot I_1^2$, přičemž výraz $\left(\frac{R_z}{p^2}\right)$ značí zátěž přepočtenou do primáru. Po transformaci zátěže do primáru, bude $I_1 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_z}{p^2}\right)^2 + X_L^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U_0}{|Z|}$.

Příkon je roven $P_1 = U_0 \cdot I_1 = \frac{U_0^2}{|Z|}$. Výkon je roven $P_2 = R_z \cdot I_2^2 = \frac{R_z}{p^2} \cdot I_1^2 = \frac{R_z}{p^2} \cdot \frac{U_0^2}{|Z|^2}$.

Energetická účinnost pak $\eta = \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{R_z}{p^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \left(\frac{R_z}{p^2}\right) \cdot \frac{1}{|Z|}$.

Pro jednoduchost položíme převod $p = 1$. Pak dostaneme pro účinnost

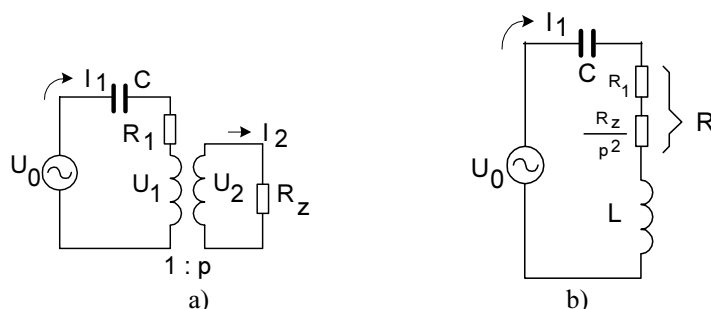
$$\eta = \frac{R_z}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{R_z}\right)^2 + \left(\frac{X_L}{R_z}\right)^2}} < 1.$$

Poznámka

U_0, I_1, I_2, U_1, U_2 jsou efektivními hodnotami.

Energetická účinnost je $\eta = f(\omega)$ a s rostoucím kmitočtem se bude vlivem zvětšování členu $\left(\frac{X_L}{R_z}\right)$ zmenšovat. Protože člen $\left(\frac{R}{R_z}\right)$ ve jmenovateli pod odmocninou je číslo větší než jednička, bude hodnota účinnosti menší než jednička.

PE5.7.2 S elektrickou rezonancí



Obr. PE5.7.2.1 Základní zapojení transformátoru jako periodického RLC obvodu a náhradní zapojení po transformaci zátěže do primáru

Uvažujeme typ rezonance $X_L = 0$.

Pro smyčku platí $U_0^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$, $|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ je modul celkové impedance.

Proud v obvodu bude $I_1 = \frac{U_0}{|Z|}$. Příkon je roven $P_1 = \frac{U_0^2}{|Z|}$. Výkon na zátěži je roven $P_2 = R_z \cdot I_2^2 = \frac{R_z}{p^2} \cdot I_1^2 = \frac{R_z}{p^2} \cdot \frac{U_0^2}{|Z|^2}$.

Energetická účinnost obvodu je

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{R_z}{p^2} \cdot \frac{U_0^2}{|Z|^2}}{\frac{U_0^2}{|Z|}} = \frac{\frac{R_z}{p^2}}{|Z|} = \frac{\frac{R_z}{p^2}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

Je zřejmé, že účinnost je závislá na kmitočtu.

Při el. rezonanci platí $(X_L - X_C) = 0$, z čehož pak účinnost je

$$\eta = \frac{\frac{R_z}{p^2}}{R} = \frac{\frac{R_z}{p^2}}{R_1 + \frac{R_z}{p^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_z} \cdot p^2}.$$

Při rezonanci vypadne závislost účinnosti na kmitočtu.

Uvažujme případ, kdy $p = 1$, pak dostaneme

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_z}} < 1.$$

Porovnáme obě účinnosti

$$k = \frac{\frac{\frac{R_z}{p^2}}{|Z|}}{\frac{\frac{R_z}{p^2}}{R}} = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{X_L}{R}\right]^2}} < 1.$$

Poznámka

Porovnáním účinností bez rezonance a s rezonancí je vidět, že v případě s rezonancí je sice účinnost větší než bez rezonance, ale v obou případech je menší než jednička, protože výraz ve jmenovateli je větší než jednička.

Poznámka

Nikola Tesla (1856–1943) se domníval, že rezonance umožňuje podstatně zvýšit výstupní výkon u laděného transformátoru a tím i účinnost přenosu signálu. Tato domněnka se ale ukázala pro technickou praxi nepostačující.

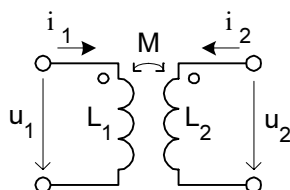
V současnosti má Tesla následníky – nadšence, kteří se domnívají, že el. rezonancí lze zvětšit účinnost až nad jedničku (tzv. over one mode).

PE5.8 Simulace TC [2], [6]

Snahou je nalezení modelu *TC* jako oboustranně laděného transformátoru, který je sice ztrátový, ale se vzduchovým jádrem je lineární. Pro simulaci TC je nutno nejprve znát model transformátoru.

PE5.8.1 Model bezeztrátového transformátoru se vzduchovým jádrem

Jeho model ukazuje následující obr.



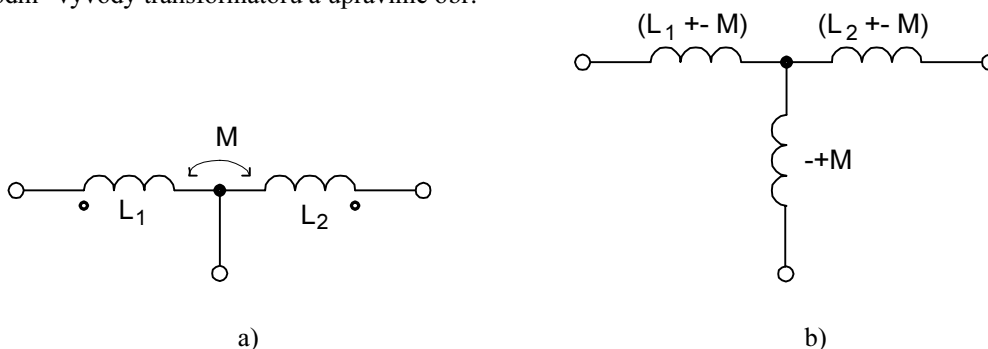
Obr. PE5.8.1.1 Model bezeztrátového transformátoru

Pro okamžité hodnoty napětí a proudů platí

$$u_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \pm M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

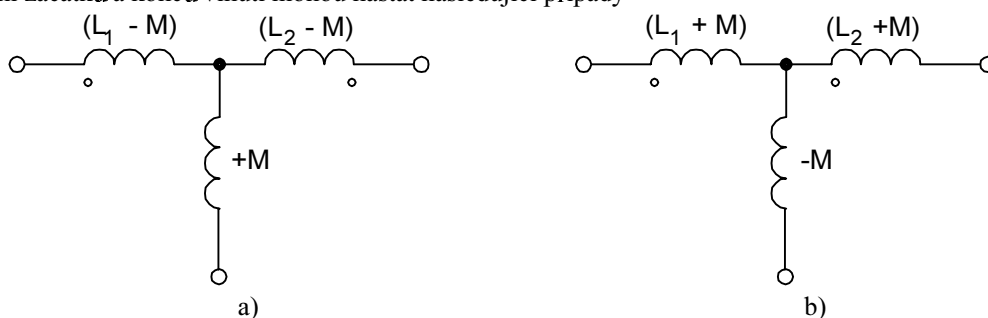
$$u_2 = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \pm M \cdot \frac{di_1}{dt}.$$

Jaké znaménko u hodnoty vzájemné indukčnosti M volit, ukazují následující náčrty. Spojíme „spodní“ vývody transformátoru a upravíme obr.



Obr. PE5.8.1.2 K modelu transformátoru

Podle zapojení začátků a konců vinutí mohou nastat následující případy



Obr. PE5.8.1.3 Modely transformátoru podle zapojení vinutí

Model transformátoru, u něhož je hodnota vzájemné indukčnosti M záporná je z důvodu fyz. realizovatelnosti nevhodný, volíme proto typ označený a), u něhož je $(M > 0)$. Prověříme nyní vybraný model označený jako a).

Volíme koeficient vazby $k = 1$. Dostaneme pro vzájemnou indukčnost výraz $M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$ a pro převod $p = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$.

Příklad

1. Mějme transformátor s následujícími parametry $L_1 = 10 \mu\text{H}$, $L_2 = 1 \text{ H}$, $k = 1$.

Hodnota vzájemné indukčnosti bude $M = \sqrt{10^{-5} \cdot 1} = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ H}$. Je zřejmé, že dostaneme $L_1 - M < 0$. Model není

realizovatelný. Převod transformátoru $p = \sqrt{\frac{1}{10^{-5}}} = 316$.

Problém si zobecníme na základě úvahy, jaké máme volit parametry, aby byl model fyzikálně realizovatelný.

1. Když volíme $L_1 = L_2 = L$, $k = 1$, dostaneme $M = L$, $p = 1$, z čehož pak $L - M = 0$. Opět jako model nevhodný.
2. Když volíme $L_2 = n \cdot L_1$, $k = 1$, dostaneme $M = L_1 \sqrt{n}$, $p = \sqrt{n}$, z čehož pak pro $n > 1$ je $L_1 - M = L_1(1 - \sqrt{n}) < 0$. $L - M = 0$. Opět jako model nevhodný.
3. Když volíme $L_1 = n \cdot L_2$, $k = 1$, dostaneme $M = L_1 \sqrt{\frac{1}{n}}$, $p = \sqrt{\frac{1}{n}}$, z čehož dostaneme pro $n > 1$, $L_1 - M = L_1(1 - \sqrt{\frac{1}{n}}) > 0$, ale $L_2 - M = L_2(1 - \sqrt{n}) < 0$. Opět jako model nevhodný.
4. Když volíme $L_2 = n \cdot L_1$, $M = m \cdot L_1$, dostaneme požadavek na koeficient vazby $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$ pro $m < 1$, $n > 1$, je model vhodný k realizaci.

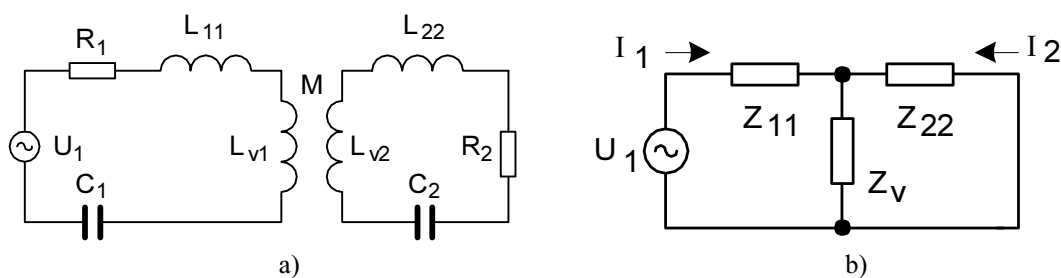
Model TC ve tvaru T-čláčku, proto budeme dále analyzovat jako obecný dvojbran a stanovíme si jeho maticové charakteristiky.

Poznámka

Doplň-li se výst. svorky modelu transformátoru ideálním transformátorem s převodem $p = 1$, bude výsledný model tzv. svorkově ekvivalentní.

PE5.8.2 Model oboustranně laděného TC

Oboustranně laděným transformátorem se budou rozumět vázané obvody s indukční transformátorovou vazbou mezi dvěma kmitavými obvody



a)

Obr. PE5.8.2.1 Náhradní zapojení TC

a) základní zapojení indukční transformátorové vazby s oboustranným laděním,

b) obecné zapojení TC jako dvojbranu ve tvaru T-čláčku

Energie z primárního kmitavého obvodu do sekundárního obvodu je přenášena mg. polem, přičemž vazební impedance je $Z_v = \omega \cdot M$, kde M je vzájemná indukčnost mezi indukčnostmi L_{v1}, L_{v2} . Výhodou této reaktanční vazby je skutečnost, že nevznikají ztráty energie. Indukčnosti L_{11}, L_{22} jsou indukčnostmi rozptylovými. Bude platit, že celkové indukčnosti primárního (sekundárního) obvodu jsou $L_1 = L_{11} + L_{v1}$, $L_2 = L_{22} + L_{v2}$.

Pro zapojení TC jako dvojbranu ve tvaru T-čláčku lze psát pro vst. smyčku $-U_1 + Z_{11} \cdot I_1 + Z_v \cdot (I_1 + I_2) = 0$. Pro výst. smyčku $0 + Z_{22} \cdot I_2 + Z_v \cdot (I_1 + I_2) = 0$. Po úpravě dostaneme pro vst. smyčku $U_1 = (Z_{11} + Z_v) \cdot I_1 + Z_v \cdot I_2$, pro výst. smyčku $0 = (Z_{22} + Z_v) \cdot I_2 + Z_v \cdot I_1$. Po dosazení za $Z_{11} + Z_v = Z_1$, $Z_{22} + Z_v = Z_2$ dostaneme pro vst. smyčku $U_1 = Z_1 \cdot I_1 + Z_v \cdot I_2$ a pro výst. smyčku $0 = Z_2 \cdot I_2 + Z_v \cdot I_1$.

PE5.8.3 Činitel vazby

Jeho zavedení dává možnost posoudit míru vlivu mezi vázanými obvody. Činitel vazby je definován vztahem

$$k = \frac{Z_v}{\sqrt{Z_{v1} \cdot Z_{v2}}} = \frac{X_v}{\sqrt{X_{v1} \cdot X_{v2}}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega(L_{11} + L_{v1}) \cdot \omega(L_{22} + L_{v2})}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}.$$

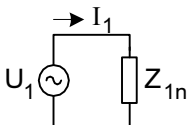
Hodnota činitele vazby se pohybuje v rozmezí $k \in (0 \div 1)$.

Poznámka

Změna činitele vazby se dosahuje změnou rozptylových indukčností L_{11}, L_{22} , např. přiblížením nebo oddálením L_{v1}, L_{v2} od sebe navzájem. Další možností změny je např. bifilární vinutí, jímž se dosahuje podstatného zvětšení činitele vazby i jakosti.

PE5.8.4 Náhradní impedance primárního obvodu

Uvažujeme ustálený stav a buzení zdrojem střídavého napětí $U_1 = U_m \cdot \sin \omega t$ podle následujícího obr.



Obr. PE5.8.4.1 Náhradní zapojení vst. obvodu

Z modelu T-článku s využitím 1. Kirchhoffova zákona vyplývá $I_v = I_1 + I_2$, kde I_v je proud vazební impedance, I_1 je proud ze zdroje U_1 do vst. impedance, I_2 je proud ve výst. obvodu (proud zátěží).

Náhradní vst. (primární) impedance je daná vztahem (viz zapojení T-článku)

$$Z_{1n} = Z_{11} + \frac{Z_v \cdot Z_{22}}{Z_v + Z_{22}} = Z_{11} + \frac{Z_v \cdot [(Z_{22} + Z_v) - Z_v]}{(Z_v + Z_{22})} = Z_{11} + \frac{Z_v \cdot (Z_{22} + Z_v)}{(Z_v + Z_{22})} - \frac{Z_v^2}{(Z_v + Z_{22})}.$$

Dosadíme za $Z_1 = Z_{11} + Z_v$, $Z_2 = Z_{22} + Z_v$, přičemž je Z_1 celková impedance primárního obvodu, Z_2 je celkovou impedancí sekundárního obvodu. Po dosazení dostaneme

$$Z_{1n} = (Z_{11} + Z_v) - \frac{Z_v^2}{Z_2} = Z_1 - \frac{Z_v^2}{Z_2}.$$

Ze vztahu je vidět, že vst. impedance je vlivem reaktanční vazby zmenšena o člen $\left(-\frac{Z_v^2}{Z_2}\right)$, jenž byl nazván *přenosovou impedancí* Z_{21} . Po dosazení pak $Z_{1n} = Z_1 + Z_{21}$.

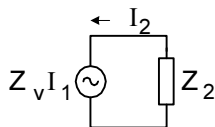
Poznámka

U přenosové impedance Z_{21} značí index (2) místo, odkud byla impedance převedena (z výst. obvodu), index (1) místo, kam byla převedena (vst. obvod). (Použit je směrový princip odkud–kam.)

Po dosazení pro náhradní vst. obvod lze psát $U_1 = Z_{1n} \cdot I_1 = (Z_1 + Z_{21}) \cdot I_1$, kde $Z_{21} = -\frac{Z_v^2}{Z_2}$.

PE5.8.5 Náhradní impedance sekundárního obvodu

Opět uvažujeme ustálený stav v obvodu podle následujícího obr.



Obr. PE5.8.5.1 Náhradní zapojení výst. obvodu

Ze zapojení T-článku s využitím 2. Kirchhoffova zákona lze psát $Z_{22} \cdot I_2 + Z_v \cdot (I_1 + I_2) = 0$, z čehož

$Z_v \cdot (I_1 + I_2) = -Z_{22} \cdot I_2$ a po úpravě $Z_v \cdot I_1 = -(Z_v + Z_{22}) \cdot I_2 = -Z_2 \cdot I_2$. Nakonec dostaneme

$$Z_v \cdot I_1 + Z_2 \cdot I_2 = 0.$$

Z tohoto vztahu vyplývá náhradní zapojení pro výst. obvod. Tento výraz také dává převodní vztah mezi vst. a výst.

proudem ve tvaru

$$I_1 = \left(-\frac{Z_2}{Z_v}\right) \cdot I_2.$$

Vrátíme se ještě ke vztahu pro náhradní vst. obvod $U_1 = Z_{1n} \cdot I_1 = (Z_1 + Z_{21}) \cdot I_1 = \left(Z_1 - \frac{Z_v^2}{Z_2}\right) \cdot I_1$. Dosazením za vst.

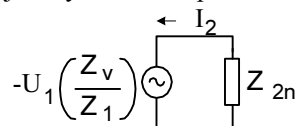
proud z předchozího vztahu dostaneme $U_1 = -\frac{Z_2}{Z_v} \cdot \left(Z_1 - \frac{Z_v^2}{Z_2}\right) \cdot I_2$. Vynásobením rovnice členem $\left(-\frac{Z_v}{Z_1}\right)$ dostaneme

$$-U_1 \cdot \left(\frac{Z_v}{Z_1} \right) = \left(Z_2 - \frac{Z_v^2}{Z_1} \right) \cdot I_2 = Z_{2n} \cdot I_2$$

nebo

$$-U_1 \cdot \left(\frac{Z_v}{Z_1} \right) = (Z_2 + Z_{12}) \cdot I_2.$$

Ze vztahů je vidět, že výst. impedance Z_2 je zmenšena o člen $\left(\frac{Z_v^2}{Z_1} \right)$, který se nazývá zpětnou přenosovou impedancí Z_{12} (ze vstupu na výstup). Výsledné náhradní zapojení výst. obvodu pak bude tvaru



Obr. PE5.8.5.2 Výsledné náhradní zapojení výst. obvodu

Vztah pro výst. proud lze získat ve tvaru

$$I_2 = \left(-\frac{Z_v}{Z_2} \right) \cdot I_1.$$

Vztah pro výst. napětí je tvaru

$$U_2 = \left(\frac{Z_v}{Z_1} \right) \cdot U_1.$$

Poznámka

Získali jsme tak obecné vztahy pro přenos proudu a přenos napětí pro TC se zátěží. Napětí U_2 je napětím „vnitřním“ a nelze ho využít.

Pro náhradní vst. a výst. obvod lze psát

$$U_1 = Z_{1n} \cdot I_1 = (Z_1 + Z_{21}) \cdot I_1$$

$$U_2 = Z_{2n} \cdot I_2 = (Z_2 + Z_{12}) \cdot I_2.$$

Abychom získali impedanční charakteristiky dvojbranu, je potřeba provést následující úpravy.

PE5.8.6 Maticové impedanční charakteristiky

Hledáme výrazy ve tvaru

$$U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$

$$U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2,$$

Kde $Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$, $Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$, $Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$, $Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$.

Pro nalezení maticových impedančních rovnic vyjdeme z 2. Kirchhoffova zákona pro náhradní T-článek, pro nějž lze psát

$$U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_v \cdot (I_1 + I_2)$$

$$U_2 = Z_{22} \cdot I_2 + Z_v \cdot (I_1 + I_2)$$

$$U_1 = (Z_{11} + Z_v) \cdot I_1 + Z_v \cdot I_2$$

$$U_2 = (Z_{22} + Z_v) \cdot I_2 + Z_v \cdot I_1$$

$$U_1 = Z_1 \cdot I_1 + Z_v \cdot I_2$$

$$U_2 = Z_2 \cdot I_2 + Z_v \cdot I_1.$$

Dostali jsme impedanční rovnice dvou vázaných obvodů jako dvojbranu.

$$U_1 = Z_1 \cdot I_1 + Z_v \cdot I_2$$

$$U_2 = Z_2 \cdot I_2 + Z_v \cdot I_1.$$

Abychom mohli dosadit za parametry Z_1, Z_2, Z_v , je potřeba si je vyjádřit nejprve pro obecnější případ reaktanční vazby a pak pro případ transformátorové vazby.

PE5.8.7 Reaktanční vazba

Vazba mezi primárním a sekundárním obvodem vzájemnou indukčností M je typu vazby reaktanční, tj. $Z_v = jX_v$. Po dosazení do obecného tvaru pro T-článek dostaneme

Náhradní vst. impedance

$$Z_{1n} = Z_1 - \frac{Z_v^2}{Z_2} = Z_1 + \frac{X_v^2}{Z_2}.$$

Přenosová impedance (z výstupu na vstup)

$$Z_{21} = -\frac{Z_v^2}{Z_2} = +\frac{X_v^2}{Z_2}.$$

Náhradní výst. impedance
$$Z_{2n} = Z_2 - \frac{Z_v^2}{Z_1} = Z_2 + \frac{X_v^2}{Z_1}.$$

Poznámka

Není-li výst. obvod uzavřen ($Z_2 = \infty$) bude $Z_{1n} = Z_1$, $Z_{2n} = \infty$.

Přenosová impedance (ze vstupu na výstup)
$$Z_{12} = -\frac{Z_v^2}{Z_1} = +\frac{X_v^2}{Z_1}.$$

Výst. proud
$$I_2 = -\frac{Z_v}{Z_2} \cdot I_1 = -\frac{Z_v}{Z_2} \cdot \frac{U_1}{Z_{1n}} = -j \frac{X_v}{Z_2 \cdot Z_{1n}} \cdot U_1 = -j \frac{X_v}{Z_1 \cdot Z_{2n}} \cdot U_1.$$

Obecný tvar vst. impedance
$$Z_1 = R_1 + jX_1.$$

Obecný tvar výst. impedance
$$Z_2 = R_2 + jX_2.$$

Obecné tvary dosadíme do vztahů pro náhradní vst. impedanci

$$Z_{1n} = (R_1 + jX_1) + \frac{X_v^2}{R_2 + jX_2} = (R_1 + jX_1) + \frac{X_v^2}{R_2 + jX_2} \cdot \frac{R_2 - jX_2}{R_2 - jX_2} = (R_1 + jX_1) + \frac{R_2 \cdot X_v^2 - jX_2 \cdot X_v^2}{R_2^2 + X_2^2} \Big| R_2^2 + X_2^2 = Z_2^2$$

po dosazení dostaneme

$$Z_{1n} = \left(R_1 + \frac{X_v^2}{Z_2^2} \cdot R_2 \right) + j \left(X_1 - \frac{X_v^2}{Z_2^2} \cdot X_2 \right) = (R_1 + R_{21}) + j(X_1 - X_{21}).$$

Po dosazení do náhradní výst. impedance

$$Z_{2n} = Z_2 - \frac{Z_v^2}{Z_1} = Z_2 + \frac{X_v^2}{Z_1}$$

po dosazení dostaneme

$$Z_{2n} = (R_2 + jX_2) + \frac{X_v^2}{R_1 + jX_1} = (R_2 + jX_2) + \frac{X_v^2}{R_1 + jX_1} \cdot \frac{R_1 - jX_1}{R_1 - jX_1} = (R_2 + jX_2) + \frac{R_1 \cdot X_v^2 - jX_1 \cdot X_v^2}{R_1^2 + X_1^2} \Big| R_1^2 + X_1^2 = Z_1^2$$

$$Z_{2n} = \left(R_2 + \frac{X_v^2}{Z_1^2} \cdot R_1 \right) + j \left(X_2 - \frac{X_v^2}{Z_1^2} \cdot X_1 \right) = (R_2 + R_{12}) + j(X_2 - X_{12}).$$

Poznámka

Při reaktanční vazbě mezi primárním a sekundárním obvodem přenosové části se činné odpory zvětšují a přenosové části reaktanční, výsledné reaktance zmenšují. To je potřeba vzít v úvahu při návrhu a činnosti TC.

PE5.8.8 Transformátorová vazba

Uvažujeme ztrátový oboustranně laděný transformátor s náhradním zapojením ve tvaru T-článku.

Transformátorová vazba je vazbou reaktanční, tj. bezztrátovou s vazební impedancí $Z_v = \omega M$. Dosadíme do vztahů pro reaktanční vazbu a dostaneme pro

Náhradní vst. impedanci
$$Z_{1n} = \left(R_1 + \frac{X_v^2}{Z_2^2} \cdot R_2 \right) + j \left(X_1 - \frac{X_v^2}{Z_2^2} \cdot X_2 \right) = \left(R_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2^2} \cdot R_2 \right) + j \left(X_1 - \frac{(\omega M)^2}{Z_2^2} \cdot X_2 \right).$$

Náhradní výst. impedanci
$$Z_{2n} = \left(R_2 + \frac{X_v^2}{Z_1^2} \cdot R_1 \right) + j \left(X_2 - \frac{X_v^2}{Z_1^2} \cdot X_1 \right) = \left(R_2 + \frac{(\omega M)^2}{Z_1^2} \cdot R_1 \right) + j \left(X_2 - \frac{(\omega M)^2}{Z_1^2} \cdot X_1 \right).$$

Vst. proud
$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{1n}}.$$

Výst. proud
$$I_2 = -j \frac{X_v}{Z_1 \cdot Z_{2n}} \cdot U_1 = -j \frac{X_v}{Z_2 \cdot Z_{1n}} \cdot U_1 = -j \frac{\omega M}{Z_1 \cdot Z_{2n}} \cdot U_1 = -j \frac{\omega M}{Z_2 \cdot Z_{1n}} \cdot U_1 = -j \frac{\omega M}{Z_1 \cdot Z_2 + (\omega M)^2} \cdot U_1.$$

Poznámka

Záporné znaménko u proudu I_2 představuje opačný směr, než je nakreslen v náhradním zapojení výst. obvodu.

PE5.8.9 Přenosy při el. rezonanci

U rezonančního transformátoru lze rozlišit 3 typy rezonancí:

1. $X_1 = 0$, $X_2 \neq 0$, jde o rezonanci v primáru,
2. $X_2 = 0$, $X_1 \neq 0$, jde o rezonanci v sekundáru,
3. $X_1 = X_2 = 0$, jde o rezonanci v primáru i v sekundáru.

Uvažujme rezonanci typu $X_1 = X_2 = 0$, z čehož vyplývá $X_{1n} = X_{2n} = 0$. Dále bude platit $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$

Náhradní vst. impedance
$$Z_{1n} = R_1 + \frac{(\omega M)^2}{R_2}.$$

Náhradní výst. impedance
$$Z_{2n} = R_2 + \frac{(\omega M)^2}{R_1}.$$

Vst. proud
$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{1n}}.$$

Výst. proud
$$I_2 = -\frac{\omega M}{R_1 \cdot R_2 + (\omega M)^2} \cdot U_1.$$

Hledáme maximum výst. napětí na zátěži $U_2 = R_2 \cdot I_2$ jako funkci $U_2(M)$. Protože R_2 není funkcí M , bude jí výst.

proud $I_2(M)$. Hledání maxima funkce je problém řešení extrému. Řešíme extrém $\frac{d}{dM} I_2(M) = 0$. Po derivaci dosta-

neme $\omega \cdot U_1 (R_1 \cdot R_2 + \omega^2 M^2) - \omega \cdot M \cdot U_1 (2M\omega^2) = 0$, z čehož po úpravě dostaneme $\omega M = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$.

Po dosazení do vztahu pro výst. proud získáme výraz pro max. hodnotu výst. proudu při rezonanci

$$I_{2m} = \frac{\sqrt{R_1 \cdot R_2}}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2} \cdot U_1 = \frac{U_1}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}}.$$

Proud do primárního obvodu bude

$$I_{1m} = \frac{U_1}{Z_{1n}} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2}} = \frac{U_1}{2R_1}.$$

Přenos napětí v rezonanci bude

$$F_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2 \cdot I_{2m}}{U_1} = \frac{R_2 \cdot \frac{U_1}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}}}{U_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$$

Přenos proudu v rezonanci bude

$$F_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{U_1}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}}}{\frac{U_1}{2R_1}} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Přenos výkonu v rezonanci bude

$$F_p = \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2 \cdot I_{2m}^2}{U_1 \cdot I_{1m}} = \frac{R_2 \cdot \left(\frac{U_1}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}} \right)^2}{U_1 \cdot \frac{U_1}{2R_1}} = \frac{1}{2}$$

Poznámka

Kontrolou pro režim naprázdno lze zjistit, že pro určitý úhlový kmitočet ω a pro režim naprázdno ($R_2 \rightarrow \infty$) by vycházela hodnota vzájemné indukčnosti $M \rightarrow \infty$, což je nerealizovatelné. Jde tedy zřejmě o vztahy přibližné s omezeným rozsahem platnosti.

Parametr přenosu výkonu je též roven energetické účinnosti, tj. platí $F_p \equiv \eta = \frac{1}{2}$. Lze tedy konstatovat, že účinnost DRTC do reálné zátěže při rezonanci a buzení harmonickým zdrojem napětí $U_1(\omega)$ je 50%.

Příklad

Uvažujme DRTC s parametry

$L_1 = 5 \cdot 10^{-3} H$, $L_2 = 10^{-1} H$, $C_1 = 2 \cdot 10^{-8} F$, $C_2 = 10^{-11} F$, $k = 0,4$, $U_1 = 10^4 V$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 10^7 \Omega$.

Máme stanovit při rezonanci

Výst. proud
$$I_{2m} = \frac{U_1}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}} = \frac{10^4}{2\sqrt{2 \cdot 10^7}} = 1,1 A.$$

Vst. proud
$$I_{1m} = \frac{U_1}{2R_1} = \frac{10^4}{2 \cdot 2} = 0,25 \cdot 10^4 = 2,5 kA !$$

Přenos napětí

$$F_u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10^7}{2}} = 1,1 \cdot 10^3 .$$

Přenos proudu

$$F_i = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{2}{10^7}} = 0,45 \cdot 10^{-3} .$$

Ze vztahu pro vst. proud DRTC je zřejmé, že jde o omezující parametr. Nutno proto navrhovat zdroj střídavého napětí $U_1(\omega)$ jako zdroj proudový (tzv. měkký) a na základě znalosti vst. proudu přepočítat ostatní parametry, nebo použít výkonový vst. zdroj.

Poznámka

Je potřeba si uvědomit, že vypočtené hodnoty platí pro dokonalou rezonanci DRTC. Při výst. jiskře (koróně) dojde ale ke zvětšení výst. kapacity a tím k vzájemnému rozladění. To povede ke zhoršení parametrů TC.