

Obsah

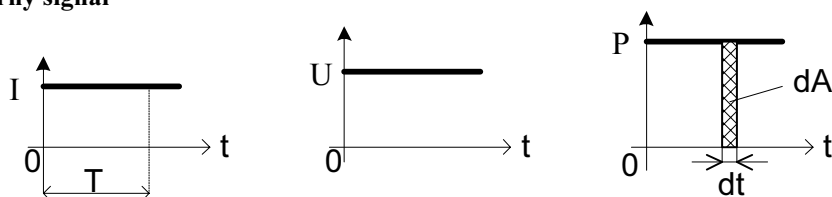
PE2.1 ENERGIE SIGNÁLU	2
PE2.2 STŘEDNÍ A EFEKTIVNÍ HODNOTA	6
PE2.3 STANOVENÍ RYCHLOSTI ČASOVÉ ZMĚNY SINUSOVÉHO SIGNÁLU	12
PE2.4 VÝKONY, ENERGIE A ÚČINNOST	13
PE2.5 VLASTNÍ INDUKCE – VLASTNÍ INDUKČNOST	16
PE2.6 VZÁJEMNÁ INDUKCE – VZÁJEMNÁ INDUKČNOST	23
PE2.7 TRANSFORMÁTOR, TLUMIVKA, REAKTOR	25

PE2.1 Energie signálu

Sledujme, jak jsou schopny el. signály různých časových průběhů akumulovat energii a jakou práci jsou schopny vykonat po danou dobu.

Vyjďeme z nejjednoduššího tvaru signálu.

PE2.1.1 Stejnoseměrný signál

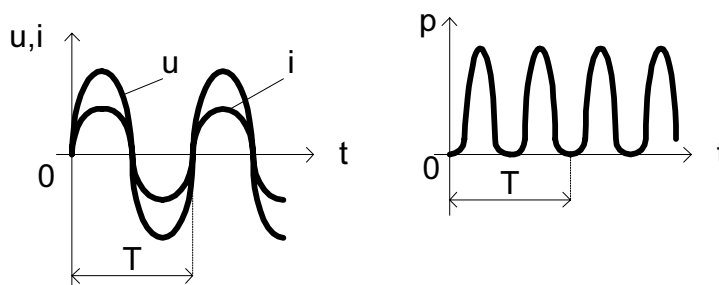


Obr. PE2.1.1.1 Časové průběhy ss signálu pro proud, napětí a výkon

Element el. práce dA za dobu dt je $dA = U \cdot I \cdot dt$. Celková el. práce vykonaná za dobu T je

$A = \int_0^T U \cdot I \cdot dt = U \cdot I \int_0^T dt = P \cdot T$, kde $P = U \cdot I$ je střední elektrický výkon signálu. El. práce je též rovna energii W akumulovaná v signálech U, I za dobu T a kterou je signál schopen dodávat po dobu T do vnějšího obvodu.

PE2.1.2 Střídavý signál ($\varphi = 0$)



Obr. PE2.1.2.1 Časové průběhy střídavého signálu pro $\varphi = 0$

Uvažujme časové průběhy proudu a napětí ve tvaru $i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$, $u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$. Časový průběh okamžitého výkonu $p(t) = u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t$. Element vykonané el. práce je $dA = u \cdot i \cdot dt = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt$. Platí

$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$. Po dosazení je celková vykonaná el. práce

$$A = \int_0^T u \cdot i \cdot dt = \int_0^T U_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt = U_m \cdot I_m \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt = P_m \int_0^T \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) \cdot dt = \frac{P_m}{2} \cdot \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{P_m}{2} \cdot T.$$

Dosadíme za $U_m = \sqrt{2} \cdot U_{ef}$, $I_m = \sqrt{2} \cdot I_{ef}$. Pak dostaneme pro práci vykonanou signálem za dobu T

$A = P_{ef} \cdot T$ a pro

$$\text{střední výkon signálu} \quad P_s = \frac{1}{T} \int dA = \frac{A}{T} = U_{ef} \cdot I_{ef} = U \cdot I.$$

Poznámka

Indexy označující efektivní hodnoty signálů se v technické praxi většinou nepíší, protože je zřejmé, o jaké veličiny jde.

Střídavý signál pro ($\varphi = 0$) platí za podmínky el. rezonance, což je v praxi též často využíváno. Podmínku

($\varphi = 0$) splňuje též práce spotřebovaná k ohřevu reálné zátěže (odporu).

PE2.1.3 Střídavý signál ($\varphi \neq 0$)

Uvažujme signály tvaru $i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$, $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Po dosazení pro okamžitý výkon dostaneme

$p(t) = u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot [\sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi)] = P_m \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$, kde $\alpha = \omega t$, $\beta = \varphi$. Použijeme vztahu

$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$. Platí též $\cos(-\varphi) = +\cos(\varphi)$, jde o tzv. sudou funkci. Po dosazení dostaneme pro okamžitý výkon

$$p(t) = \frac{P_m}{2} \cdot [\cos(-\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] = \frac{P_m}{2} \cdot \cos \varphi - \frac{P_m}{2} \cdot \cos(2\omega t + \varphi) = P_{\text{činný}} + P_{\text{jalový}}.$$

Poznámka

Ze vztahu je zřejmé, že činný výkon není na čas závislý, závisí pouze na fázovém posuvu φ mezi proudem a napětím. Výkon jalový je na čas závislý, má dvojnásobný kmitočet 2ω a je závislý též na fázovém posuvu φ . Jde o práci spotřebovanou v reaktanci X .

Střední hodnota výkonu za dobu periody signálu T

Pro střední hodnotu platí

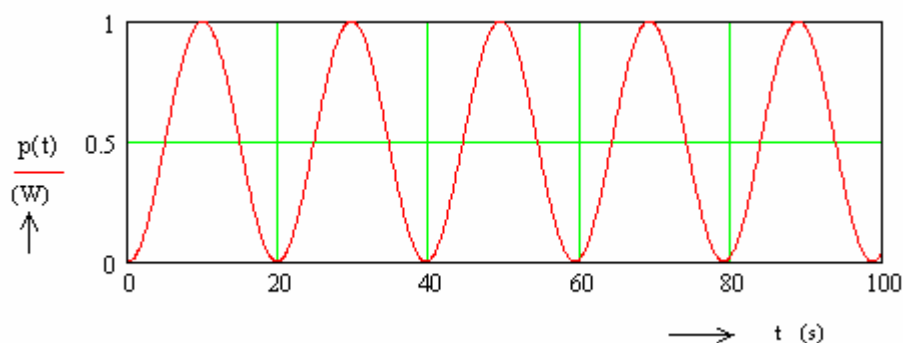
$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{P_m}{2} \cdot \left[\cos \varphi \int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \right] = \frac{1}{T} \cdot \frac{P_m}{2} \cdot \cos \varphi \cdot T = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \varphi = P_{\text{činný}}.$$

Stanovení integrálu

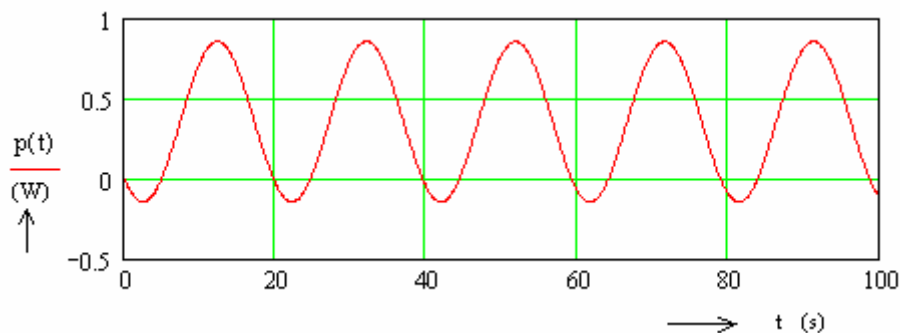
$$\begin{aligned} \frac{P_m}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) \cdot dt &= \frac{P_m}{2T} \left[\int_0^T \cos 2\omega t \cdot \cos \varphi \cdot dt - \int_0^T \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi \cdot dt \right] = \frac{P_m}{2T} \cdot \cos \varphi \int_0^T \cos 2\omega t \cdot dt - \frac{P_m}{2T} \cdot \sin \varphi \int_0^T \sin 2\omega t \cdot dt = \\ &= \frac{P_m}{2T} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{2\omega} [\sin 2\omega t]_0^T - \frac{P_m}{2T} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{1}{2\omega} [-\cos 2\omega t]_0^T = 0 \end{aligned}$$

Poznámka

Střední hodnota výkonu střídavého signálu pro $(\varphi \neq 0)$ je nenulová a je rovna výkonu činnému, kdežto střední hodnota jalového výkonu je nulová. Okamžitá hodnota výkonu $p(t)$ nabývá obecně kladných i záporných hodnot, v závislosti na úhlu φ .

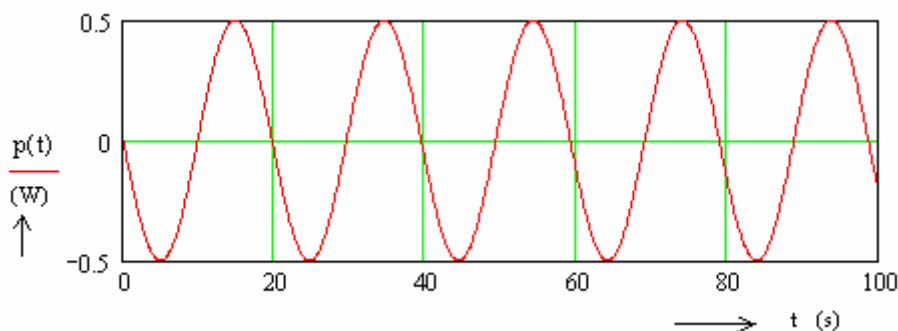


Obr. PE2.1.3.1 Časový průběh okamžitého výkonu pro $I_m = 1$ A, $U_m = 1$ V, $T = 1$ s, $f = 50$ Hz, $P_s = 0,5$ VA, $\varphi = 0$



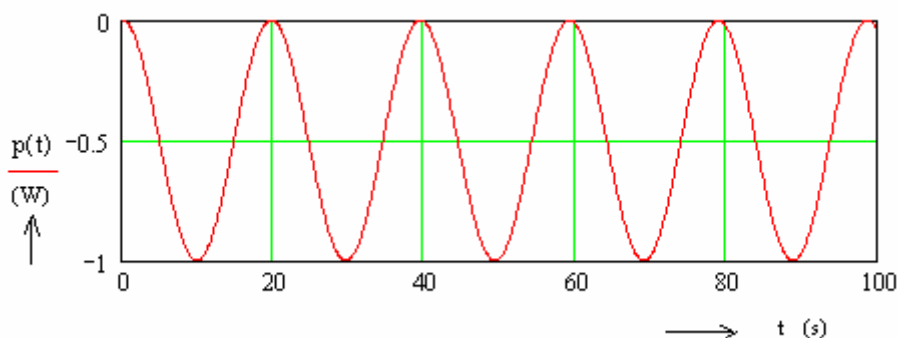
Obr. PE2.1.3.2 Časový průběh okamžitého výkonu pro $I_m = 1$ A, $U_m = 1$ V, $T = 1$ s, $f = 50$ Hz,

$$P_s = 0,354 \text{ VA}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$



Obr. PE2.1.3.3 Časový průběh okamžitého výkonu pro $I_m = 1 \text{ A}$, $U_m = 1 \text{ V}$, $T = 1 \text{ s}$, $f = 50 \text{ Hz}$

$$P_s = 0 \text{ VA}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$



Obr. PE2.1.3.4 Časový průběh okamžitého výkonu pro $I_m = 1 \text{ A}$, $U_m = 1 \text{ V}$, $T = 1 \text{ s}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

$$P_s = -0,5 \text{ VA}, \varphi = \pi$$

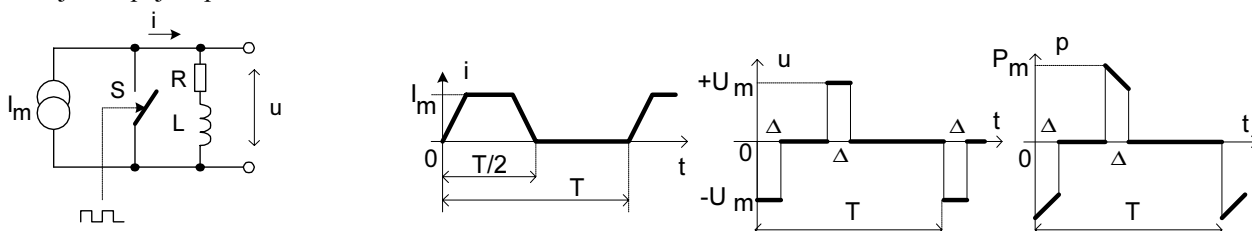
Poznámka

Na časových průbězích lze sledovat, jak se zvětšujícím se fázovým úhlem mezi napětím a proudem dochází ke zmenšování střední hodnoty výkonu. Např. při $\varphi = \pi/2$ je střední hodnota výkonu nulová. Jde o případ reaktanční zátěže. Při fázovém úhlu $\varphi = \pi$ je již střední hodnota výkonu záporná. Znamenalo by to, že el. energie je dodávána do zdroje.

V praxi se takový případ el. spotřebiče nevyskytuje.

PE2.1.4 Impulzní signál lichoběžníkový

Uvažujme zapojení podle obr.



Obr. PE2.1.4.1 Principiální zapojení obvodu generujícího lichoběžníkový signál včetně jejich aproximovaných časových průběhů i , u , p

necht' jsou aproximované průběhy popsány následujícími vztahy a necht' je $u(t) = -L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = -k \cdot L$, kde k je strmost časové změny proudu indukčností L .

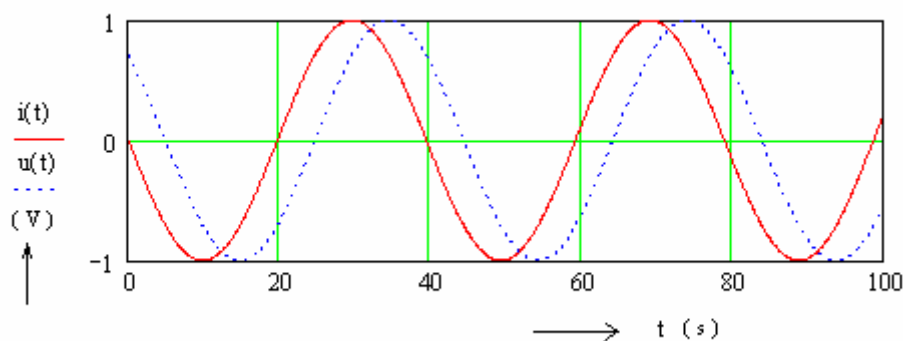
- | | | | | | |
|--------|--|----|--------------------|---------------------|-------------------------------|
| 1. pro | $t \in (0 \div \Delta)$ | je | $i(t) = k \cdot t$ | $u(t) = -k \cdot L$ | $p(t) = -k^2 \cdot L \cdot t$ |
| 2. pro | $t \in \left[\Delta \div \left(\frac{T}{2} - \Delta \right) \right]$ | je | $i(t) = I_m$ | $u(t) = 0$ | $p(t) = 0$ |

3. pro $t \in \left[\left(\frac{T}{2} - \Delta \right) \div \frac{T}{2} \right]$ je $i(t) = I_m - k \cdot t$ $u(t) = k \cdot L$ $p(t) = k \cdot L \cdot I_m - k^2 \cdot L \cdot t$
4. pro $t \in \left(\frac{T}{2} \div T \right)$ je $i(t) = 0$ $u(t) = 0$, $p(t) = 0$.

Okamžitý výkon obdélníkového signálu závisí na max. hodnotě proudu I_m , indukčnosti L a rychlosti časové změny proudu $\left(\frac{\Delta i}{\Delta t} \right)$. Střední hodnota výkonu za periodu T je rovna nule.

PE2.2 Střední a efektivní hodnota

PE2.2.1 Střední hodnota – (časová) střídavého signálu je rovna hodnotě stejnosměrného signálu se shodnými chemickými účinky. Shodné chemické účinky odpovídají shodným el. nábojům. Střední hodnota střídavého signálu je pro dobu jedné periody rovna nule. Proto se definuje pro polovinu periody. Necht' okamžité hodnoty proudu a napětí jsou tvaru $i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$, $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.



Obr PE2.2.1.1 Časové průběhy okamžitých hodnot $i(t)$, $u(t)$ pro

$$I_m = 1 \text{ A}, U_m = 1 \text{ V}, \omega = 100\pi, T = \frac{2\pi}{\omega}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Z definice tedy platí $I_s \cdot \frac{T}{2} = \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) \cdot dt$, z čehož pak pro obecný průběh $I_s = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) \cdot dt$. Po dosazení pro střídavý proud

$$I_s = \frac{2}{T} \cdot I_m \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \cdot dt = \frac{2 \cdot I_m}{\omega \cdot T} [-\cos \omega t]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot I_m = 0,637 \cdot I_m.$$

Pro posunutý signál vůči počátku je střední hodnota (např. pro $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$) rovna

$$U_s(\varphi) = \frac{2 \cdot U_m}{\pi} \cdot \cos \varphi.$$

Poznámka

Střední hodnota posunutého signálu je závislá na cosinu jeho úhlu posunutí.

PE2.2.2 Efektivní hodnota – střídavého signálu je definována jako stejnosměrná hodnota se shodným tepelným účinkem na shodné zátěži.

Vyvinuté teplo na odpor R za dobu dt je $dQ = R \cdot i^2 \cdot dt$. Teplo vyvinuté za dobu T bude pro obecný průběh

$$Q = \int_0^T dQ = R \int_0^T i^2 \cdot dt.$$

Pro ss signál – bude vyvinuté teplo za dobu T rovno $Q_{ss} = R \int_0^T I^2 \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot T$.

Porovnáním tepel $Q_{ss} = Q$ dostaneme dosazením $I^2 \equiv I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \cdot dt$, z čehož pak

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \cdot dt}.$$

Vztah udává efektivní hodnotu pro obecný střídavý signál (např. el. proud)

1. Pro střídavý signál sinusový $[i(t) = I_m \cdot \sin \omega t]$

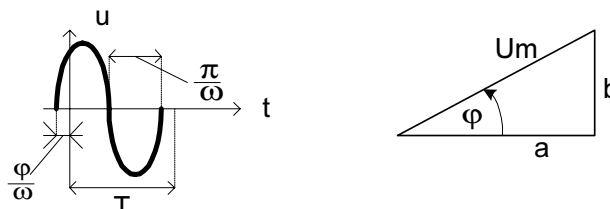
Po dosazení $I_{ef}^2 = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt$. Platí $\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$. Opět dosadíme

$$I_{ef}^2 = \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) \cdot dt = \frac{I_m^2}{2T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{I_m^2}{2}, \text{ z čehož efektivní hodnota je}$$

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m.$$

Efektivní hodnota posunutého střídavého signálu

např. pro napětí $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$



Obr. PE2.2.2.1 Zobrazení posunutého signálu a jeho složkové znázornění

S použitím složkového vyjádření lze psát $u(t) = a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t$, kde $U_m = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} U_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T (a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t)^2 \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T (a^2 \cdot \sin^2 \omega t + 2ab \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t + b^2 \cdot \cos^2 \omega t) \cdot dt = \\ &= \frac{a^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt + \frac{2ab}{T} \int_0^T \sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot dt + \frac{b^2}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt. \end{aligned}$$

Stanovení integrálů

$$I_1 = \frac{a^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt = \left| \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right| = \frac{a^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) \cdot dt = \frac{a^2}{2T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{a^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2ab}{T} \int_0^T \sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot dt = \left| \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \right| = \\ &= \frac{2ab}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t \cdot dt = \frac{ab}{T} \left[-\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = 0 \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{b^2}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt = \left| \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \right| = \frac{b^2}{2T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) \cdot dt = \frac{b^2}{2T} \left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{b^2}{2}.$$

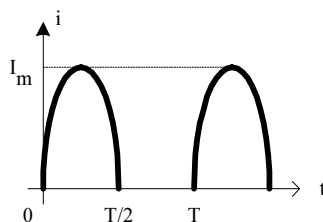
Po dosazení do vztahu pro efektivní hodnotu dostaneme

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2) = \frac{U_m^2}{2}, \text{ z čehož pak efektivní hodnota posunutého signálu je } U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Poznámka

Posunutí signálu nemá vliv na jeho efektivní hodnotu.

PE2.2.3 Efektivní hodnota jednocestně usměrněného signálu



Obr. PE2.2.3.1 Jednocestně usměrněný sinusový signál

Porovnáním tepel $Q_{ss} = Q$ dostaneme dosazením $I^2 \equiv I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \cdot dt$.

Pro ss signál – bude vyvinuté teplo za dobu T rovno $Q_{ss} = R \int_0^T I^2 \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot T$.

Protože střídavý signál je v čase $t \in \left(\frac{T}{2} \div T\right)$ roven nule, postačí integrovat pouze v mezích $t \in \left(0 \div \frac{T}{2}\right)$. Pro

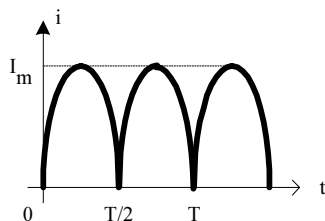
střídavý signál sinusový $i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$ je po dosazení $I_{ef}^2 = \frac{I_m^2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega t \cdot dt$. Platí $\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$. Opět

dosadíme $I_{ef}^2 = \frac{I_m^2}{2T} \int_0^{\frac{T}{2}} (1 - \cos 2\omega t) \cdot dt = \frac{I_m^2}{2T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{I_m^2}{4}$, z čehož efektivní hodnota je

$$I_{ef} = \frac{I_m}{2} = 0,5 \cdot I_m.$$

Efektivní hodnota jednocestně usměrněného signálu je rovna polovině jeho max. hodnoty.

PE2.2.4 Efektivní hodnota dvojcestně usměrněného signálu



Obr. PE2.2.4.1 Dvojcestně usměrněný sinusový signál

Opět vyjdeme z porovnání tepel ss a střídavého signálu. Protože nelze použít rovnici pro sinusovku v rozsahu celé periody, použijeme pouze pro polovinu periody, ale i pro ss signál.

Porovnáním tepel $Q_{ss} = Q$ dostaneme dosazením pro půlperiody $I^2 \cdot \frac{T}{2} \equiv I_{ef}^2 \cdot \frac{T}{2} = \int_0^{T/2} i^2 \cdot dt$.

Pro ss signál – bude vyvinuté teplo za dobu $\left(\frac{T}{2}\right)$ rovno $Q_{ss} = R \int_0^{T/2} I^2 \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot \frac{T}{2}$.

Protože střídavý signál se v čase $t \in \left(\frac{T}{2} \div T\right)$ opakuje, postačí integrovat pouze v mezích $t \in \left(0 \div \frac{T}{2}\right)$. Pro střídavý

signál sinusový $i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$ v rozsahu půlperiody je po dosazení $I_{ef}^2 \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega t \cdot dt$. Platí

$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$. Opět dosadíme $\frac{I_m^2}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} (1 - \cos 2\omega t) \cdot dt = \frac{I_m^2}{2} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} = I_m^2 \cdot \frac{T}{4}$. Toto musí být rovno

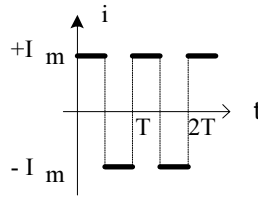
$I_{ef}^2 \cdot \frac{T}{2}$. Po dosazení pro $t = T$ pak dostaneme $I_{ef}^2 \cdot \frac{T}{2} = I_m^2 \cdot \frac{T}{4}$, z čehož je efektivní hodnota rovna $I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Poznámka

Pro dvojcestně usměrněný signál je efektivní hodnota rovna $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707\right)$ hodnoty maximální.

PE2.2.5 Střední a efektivní hodnota pro obdélníkový signál

Uvažujme signál bipolární



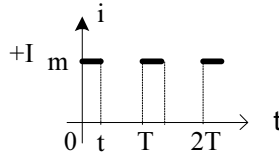
Obr. PE2.2.5.1 Oboupolaritní obdélníkový signál (bipolární impuls)

Je zřejmé, že střední hodnota za dobu periody T je rovna nule. Efektivní hodnotu stanovíme pro půlperiodu.

Pro vyvinutá tepla platí $Q_{ss} = R \cdot I^2 \cdot \frac{T}{2}$, $Q_{imp} = R \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 \cdot dt$.

Z rovnosti tepel $I^2 \equiv I_{ef}^2 = \frac{2}{T} \cdot I_m^2 \int_0^{\frac{T}{2}} dt = \frac{2}{T} \cdot I_m^2 \cdot \frac{T}{2} = I_m^2$, z čehož nakonec $I_{ef} = I_m$.

Uvažujme signál impulzní unipolární



Obr. PE2.2.5.2 Jednopolární obdélníkový signál (unipolární impuls)

V tomto případě za dobu periody T střední hodnota již nebude nulová. Vyjdeme z rovnosti nábojů

$I_m \cdot t = I_s \cdot T$, z čehož střední hodnota bude $I_s = \frac{t}{T} \cdot I_m = p \cdot I_m$, kde p je střída impulzního (proudového) signálu.

Efektivní hodnota se stanoví z tepel pro ss signál $Q_{ss} = R \cdot I^2 \cdot T$ a impulzní signál $Q_{imp} = R \cdot \int_0^T i^2 \cdot dt$.

Z rovnosti tepel dostaneme $I^2 \equiv I_{ef}^2 = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^t dt + \frac{I_m^2}{T} \int_t^T dt = \frac{t}{T} \cdot I_m^2$, čehož nakonec

$$I_{ef} = \sqrt{p} \cdot I_m.$$

Příklad

Máme stanovit střední a efektivní hodnotu proudového impulzního signálu pro $I_m = 1 \text{ A}$, $p = \frac{1}{4}$ a výkon ztracený v zátěži $R = 10 \Omega$.

Řešení

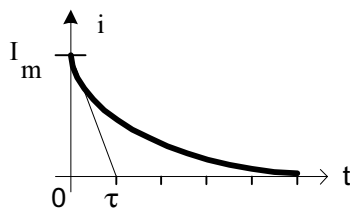
Střední hodnota impulzního proudu je $I_s = p \cdot I_m = \frac{1}{4} \cdot 1 = 0,25 \text{ A}$. Efektivní hodnota je rovna

$$I_{ef} = \sqrt{p} \cdot I_m = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 1 = 0,5 \text{ A}.$$

Pro výkon ztracený v zátěži platí $P = R \cdot I_{ef}^2 = R \cdot p \cdot I_m^2 = p \cdot P_m = \frac{1}{4} \cdot 10^1 = 2,5 \text{ W}$

PE2.2.6 Střední a efektivní hodnota exponenciálního signálu

a) Uvažujme exp. signál tvaru



Obr. PE2.2.6.1 Exponenciálně klesající signál

Časový průběh signálu je popsán vztahem $i = I_m \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$. Střední hodnotu stanovíme z rovnosti nábojů

$Q_{ss} = I \cdot t_1$ a $Q_{exp} = \int_0^{t_1} i \cdot dt$, kde t_1 je aktivní doba (sepnutí, rozepnutí).

$$\text{Z rovnosti nábojů platí} \quad I_s = \frac{I_m}{t_1} \int_0^{t_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \frac{I_m}{t_1} \cdot (-\tau) \cdot \left[e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{t_1} = \frac{\tau}{t_1} \cdot I_m \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right).$$

Ze vztahu je vidět, že střední hodnota se mění podle délky aktivní doby.

$$\text{Pro } t_1 = 3\tau \rightarrow I_s \approx \frac{1}{3} \cdot I_m, \text{ pro } t_1 = 5\tau \rightarrow I_s \approx \frac{1}{5} \cdot I_m.$$

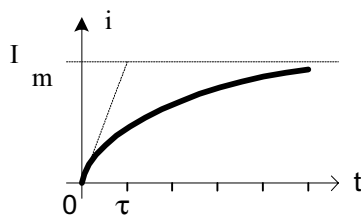
Efektivní hodnotu stanovíme z rovnosti tepel. Pro stejnosměrný signál $Q_{ss} = R \cdot I^2 \cdot t_1$ a pro exp. signál

$$Q_{exp} = R \int_0^{t_1} i^2 \cdot dt. \text{ Z rovnosti tepel plyne } I_{ef}^2 = \frac{I_m^2}{t_1} \int_0^{t_1} e^{-\frac{2t}{\tau}} \cdot dt = \frac{I_m^2}{t_1} \cdot \left(-\frac{\tau}{2} \right) \left[e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{t_1} = \frac{\tau}{2t_1} \cdot I_m^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{2t_1}{\tau}} \right).$$

$$\text{Pro } t_1 = 3\tau \rightarrow I_{ef} \approx \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot I_m, \text{ pro } t_1 = 5\tau \rightarrow I_{ef} \approx \sqrt{\frac{1}{10}} \cdot I_m.$$

Z výsledků vyplývá, že poměr $\frac{I_{ef}}{I_s} \neq konst$ a tudíž přístroje, které měří střední hodnotu exp. signálu, nelze nakalibrovat na hodnotu efektivní.

b) Uvažujme exp. signál tvaru



Obr. PE2.2.6.2 Exponenciálně rostoucí signál

Časový průběh signálu je popsán vztahem $i = I_m \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$. Střední hodnotu stanovíme z rovnosti nábojů

$Q_{ss} = I \cdot t_1$ a $Q_{exp} = \int_0^{t_1} i \cdot dt$. Z rovnosti nábojů platí

$$I_s = \frac{I_m}{t_1} \int_0^{t_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot dt = \frac{I_m}{t_1} \cdot \left[t - (-\tau) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{t_1} = \frac{1}{t_1} \cdot I_m \cdot \left[t_1 - \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right) \right].$$

Ze vztahu je vidět, že střední hodnota se i v tomto případě mění podle délky aktivní doby (doba měření).

$$\text{Pro } t_1 = 3\tau \rightarrow I_s \approx \frac{2}{3} \cdot I_m, \text{ pro } t_1 = 5\tau \rightarrow I_s \approx \frac{4}{5} \cdot I_m.$$

Efektivní hodnotu opět stanovíme z rovnosti tepel. Pro stejnosměrný signál $Q_{ss} = R \cdot I^2 \cdot t_1$ a pro exp. signál

$Q_{exp} = R \int_0^{t_1} i^2 \cdot dt$. Z rovnosti tepel plyne

$$I_{ef}^2 = \frac{I_m^2}{t_1} \int_0^{t_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 \cdot dt = \frac{I_m^2}{t_1} \int_0^{t_1} \left(1 - 2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \cdot dt = \frac{I_m^2}{t_1} \cdot \left[t - 2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(-\frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{t_1} =$$

$$= \frac{I_m^2}{t_1} \cdot \left[t_1 - 2\tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) + \frac{\tau}{2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2t_1}{\tau}}\right) \right].$$

Pro $t_1 = 3\tau \rightarrow I_{ef} \approx \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot I_m$, pro $t_1 = 5\tau \rightarrow I_{ef} \approx \sqrt{\frac{7}{10}} \cdot I_m$.

Poznámka

Pro střídavý trojúhelníkový signál je střední hodnota za periodu T rovna nule, efektivní hodnota je rovna

$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot I_m$. Pro střídavý pilový signál je střední hodnota za periodu T rovna nule, efektivní hodnota je též

rovna $I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot I_m$.

PE2.2.7 Činitel tvaru a výkyvu

PE2.2.7.1 Činitel tvaru

Udává poměr efektivní hodnoty k hodnotě střední, tj.

$$k_t = \frac{U_{ef}}{U_s}, \quad k_t = \frac{I_{ef}}{I_s}.$$

Pro harmonický střídavý signál sinusový je $k_t = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} \cdot U_m} = \frac{0,707}{0,632} = 1,111$.

PE2.2.7.2 Činitel výkyvu

Je definován poměrem maximální a efektivní hodnoty, tj.

$$k_v = \frac{I_{\max}}{I_{ef}}, \quad k_v = \frac{U_{\max}}{U_{ef}}.$$

Pro harmonický střídavý signál sinusový je $k_v = \frac{U_m}{\frac{U_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} = 1,414$.

Poznámka

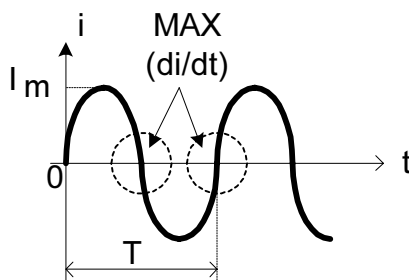
Klasické měřicí přístroje napětí a proudu střídavých průběhů využívají usměrňovače. Jejich výstup je úměrný střední hodnotě. Jsou ale kalibrovány v hodnotách efektivních.

Např. při měření střídavého napětí přístroji magnetoelektrickými (ručkovými) nebo i levnějšími typy digitálními je výchylka, při měření napětí $U = U_s = 0,632 \cdot U_m$. Po vynásobení činitelem tvaru $k_t = 1,111$ se získá hodnota rovna $U_{ef} = 0,707 \cdot U_m$. Výsledkem je měření střední hodnoty kalibrované v ef. hodnotě. Takové přístroje mají pro ef. hodnoty označení RMS (Root Mean Square). Tyto přístroje ef. hodnoty *neměří* správně pro neharmonické průběhy (nesinusového tvaru).

Na tuto skutečnost je potřeba dávat pozor při měření tam, kde lze očekávat skreslený sinusový signál.

Pro zkreslené a nesinusové průběhy správně měří efektivní hodnoty přístroje typu True-RMS (též TRMS), které efektivní hodnotu počítají z definice ef. hodnoty.

PE2.3 Stanovení rychlosti časové změny sinusového signálu



Obr.2.3.1 Maximální časové změny sinusového průběhu

Abychom mohli stanovit hodnotu rychlosti časové změny mg. indukčního toku $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$, vyjdeme ze vztahu pro

sinusový signál proudu $i_1 = I_m \cdot \sin \omega t$. Pak rychlost časové změny (derivace) je rovna $\frac{d}{dt}[i(t)] = \omega \cdot I_m \cdot \cos \omega t$.

Z časového průběhu sinusového průběhu je vidět, že max. rychlost změny bude vždy při průchodu nulou, tj. např. při $t = 0$. Tomu bude odpovídat $(\cos 0 = 1)$

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = \omega \cdot I_m = 2\pi \cdot I_m \cdot f.$$

Poznámka

Maximální rychlost časové změny pro sinusový průběh je přímo úměrná amplitudě I_m a kmitočtu sinusového průběhu f .

Příklad

- 1) Necht' $I_m = 1,0 \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$. Rychlost časové změny je

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = 2\pi \cdot 1 \cdot 50 = 314 \text{ A.s}^{-1}.$$

- 2) Necht' $U_m = 325 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$. Rychlost časové změny je

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = 2\pi \cdot U_m \cdot f = 2\pi \cdot 325 \cdot 50 = 1,02 \cdot 10^5 \text{ V.s}^{-1}.$$

- 3) Necht' $U_m = 10 \text{ kV}$, $f = 15 \text{ kHz}$. Rychlost časové změny je

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = 2\pi \cdot U_m \cdot f = 2\pi \cdot 10^4 \cdot 1,5 \cdot 10^4 = 9,42 \cdot 10^8 \text{ V.s}^{-1}.$$

Poznámka

Parametr rychlosti časové změny napětí $\left(\frac{du}{dt}\right)$ nebo proudu $\left(\frac{di}{dt}\right)$ je velmi důležitý u komplexních zátěží, kde způsobují překmity napětí (přepětí) na spínačích.

Rychlost časové změny je v technické praxi též nazývána kratším výrazem jako *strmost* (napěťová, proudová).

PE2.4 Výkony, energie a účinnost

Výkon jako skalární fyz. veličina, která charakterizuje rychlost konání práce nebo též časovou změnu energie.

V našem případě se jedná o výkon elektrický, který je definován součinem napětí a proudu (uvažujeme střídavé veličiny).

PE2.4.1 Typy elektrických výkonů

1. *okamžitý* – je to výkon v daném okamžiku, $p(t) = u(t) \cdot i(t)$.
2. *činný* – je dán součinem napětí a činnou složkou proudu, $P_e = U \cdot I_e = U \cdot I \cdot \cos \varphi$. Udává se ve Watech. Jde o výkon nevratný (např. Jouleho teplo).
3. *jalový* – je dán součinem napětí a jalové složky proudu, $Q = U \cdot I_j = U \cdot I \cdot \sin \varphi$. Udává se ve varech. Jde o výkon vratný (např. energie el. pole nebo energie mg. pole).
4. *zdánlivý* – je dán součinem efektivních hodnot napětí a proudu, $S = U \cdot I$. Udává se ve VA.
5. *střední* – je definován tvarem $P \equiv P_s = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt$.

Je to např. výkon ztracený v pasivním dvojpólu za dobu T .

Úhel φ je úhel mezi fázory napětí a proudu. Platí $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

PE2.4.2 Střední výkon

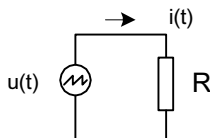
Parametr středního výkonu je jedním z nejčastěji zjišťovaným parametrem při hodnocení vlastností elektrotechnických zařízení. Stanovíme střední výkon v následujících případech. (Je-li zřejmé, o jaký výkon se jedná, tak index s není nutno psát).

1. Střední výkon v reálném odporu R

Napětí na odporu je dáno vztahem $u(t) = R \cdot i(t)$. Po dosazení dostaneme $P = R \cdot I_{ef}^2 = \frac{R}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt$. Ze vztahu vyplývá,

že zatížení pasivního dvojpólu, pro něhož platí $R = konst.$, je dáno efektivní (střední kvadratickou) hodnotou proudu.

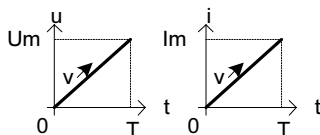
2. Uvažujme případ obvodu podle obr.



Obr. PE2.4.2.1 Zdroj pilového signálu připojený k reálné zátěži

Necht' pro napětí na zátěži platí $u(t) = k_u \cdot t$, a pro proud $i(t) = k_i \cdot t$. Práce spotřebovaná při připojení zdroje k reálné zátěži je $W_R = \int p \cdot dt$, kde p je okamžitý výkon na zátěži, pro který lze psát $p(t) = u(t) \cdot i(t) = k_u \cdot k_i \cdot t^2$. Po dosazení

dostaneme $W_R = k_u \cdot k_i \int_0^T t^2 \cdot dt = \frac{1}{3} T^3 \cdot k_u \cdot k_i$. Směrnice pro napětí a proud mají fyzikální význam stanovený podle následujícího obr.



Obr. 2.4.2.2 Časové průběhy napětí a proudu měnící se rychlostí $v = konst.$

Z časových průběhu lze psát $k_u = \frac{U_m}{T}$, $k_i = \frac{I_m}{T}$, pro $t \equiv T$ dostaneme střední hodnotu přepínacího výkonu

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T k_u \cdot k_i \cdot dt = \frac{1}{T^3} \cdot U_m \cdot I_m \int_0^T t^2 \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot U_m \cdot I_m = \frac{1}{3} \cdot P_{\max}.$$

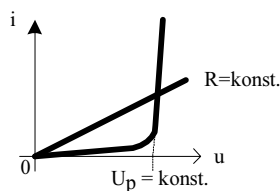
3. Uvažujme dvojpól, u něhož platí $u(t) = U_p = konst.$

Střední výkon je po dosazení
$$P_s = \frac{U_p}{T} \int_0^T i(t) \cdot dt = U_p \cdot I_s.$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že střední výkon je dán střední hodnotou proudu a nikoliv efektivní.

Poznámka

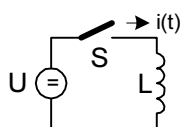
Dvojpól, u něhož platí $u(t) = U_p \approx \text{konst.}$ je polovodičová dioda.



Obr. PE2.4.2.3 VA charakteristika polovodičové diody v porovnání s odporem

Tato úvaha ale platí pouze pro diodu v propustném směru (pouze přibližně).

4. Uvažujme případ podle následujícího obr.



Obr. PE2.4.2.4 Nabíjení ideálního induktoru z ss zdroje napětí

Časový průběh proudu v obvodu po zapnutí se stanoví pomocí indukčního zákona. Pro napětí na induktoru platí $u = L \cdot \frac{di}{dt}$, z čehož je $di = \frac{1}{L} u \cdot dt$. Po připojení zřejmě bude $u \equiv U$, tj. $di = \frac{U}{L} \cdot dt$. Po integraci pak

$i(t) = \left(\frac{U}{L}\right) \cdot t = k_i \cdot t$. Časová závislost pro napětí je $u(t) = U = \text{konst.}$ Časový průběh okamžitého výkonu bude

$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \left(\frac{U^2}{L}\right) \cdot t$. Střední hodnota výkonu při spínání bude $P_s = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{U^2}{L \cdot T} \int_0^T t \cdot dt = \frac{1}{2} \left(\frac{U^2}{L}\right) \cdot T$.

Poznámka

Rozměrová rovnice pro poslední vztah je $\left[\frac{V^2}{H} \cdot s = \frac{V^2 \cdot s}{V \cdot s \cdot A^{-1}} = V \cdot A \right]$.

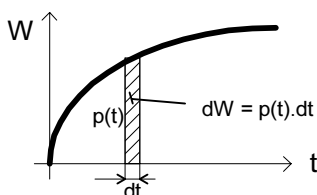
Jestliže časový průběh okamžitého výkonu bude úměrný druhé mocnině času, bude střední hodnota výkonu úměrná $\left(\frac{1}{3}\right) P_{\max}$, jestliže časový průběh okamžitého výkonu bude přímo úměrný první mocnině času, bude střední hodnota výkonu úměrná $\left(\frac{1}{2}\right) P_{\max}$.

PE2.4.3 Energie – práce

Energie – skalární fyz. veličina, jejíž změna (přírůstek, úbytek) představuje práci $\Delta W = W_2 - W_1 \equiv A$.

Uvažujme např. energii dodanou ze zdroje. Element dodané energie za dobu dt je $dW = p(t) \cdot dt$. Celková energie

dodaná např. za dobu sepnutí spínače je $W(t_1) = \int_0^{t_1} dW = \int_0^{t_1} p(t) \cdot dt$.

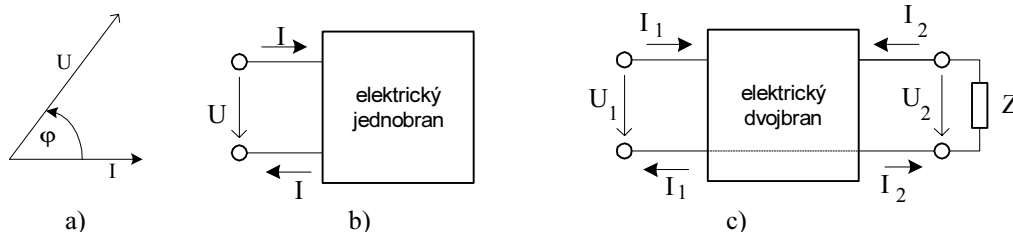


Obr. PE2.4.3.1 K celkové energii za daný čas

Práce je spotřebovaná energie. Práce spotřebovaná za dobu sepnutí spínače, je rovna energii za tuto dobu dodanou, tj. platí $A(t_1) \equiv W(t_1)$.

PE2.4.4 Účinník

Je bezrozměrná veličina daná poměrem činného výkonu ku výkonu zdánlivému. $\cos \varphi = \frac{P}{S}$, nebo $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$



Obr. PE2.4.4.1 Fázorový diagram napětí a proudu el. spotřebiče (el. jednobranu, el. dvojbranu)

Příklad

Nechť sériový RLC obvod má tyto parametry $R = 20 \, \Omega$, $X_L = 36 \, \Omega$, $X_C = 11 \, \Omega$, $U = 200 \, \text{V}$.

Máme určit výkony P , Q , S , $\cos \varphi$, $\sin \varphi$.

Řešení:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{20^2 + (36 - 11)^2} = \sqrt{1025} \approx 32 \, \Omega. \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{200}{32} = 6,25 \, \text{A}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{20}{32} = 0,625,$$

$$S = U \cdot I = 200 \cdot 6,25 = 1250 \, \text{VA}, \quad P = S \cdot \cos \varphi = 1,25 \cdot 10^3 \cdot 0,625 = 781 \, \text{W},$$

$$\sin \varphi = \frac{X_L - X_C}{Z} = \frac{36 - 11}{32} = \frac{25}{32} = 0,788,$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = 1,25 \cdot 10^3 \cdot 0,788 = 985 \, \text{var}.$$

PE2.4.5 Účinnost

Je mírou využití energie v daném zařízení. Protože v každém zařízení jsou ztráty energie, platí $\eta < 1$. Je bezrozměrnou veličinou.

Je definována jako:

1. poměr výkonu k příkonu (stroje, zařízení, el. dvojbranu), $\eta = \frac{\text{výkon}}{\text{příkon}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1 \cdot I_1} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}$.
2. podíl práce vykonané za urč. dobu k energii za tuto dobu dodané $\eta = \frac{A}{W} = \frac{\text{vykonaná práce}}{\text{dodaná energie}}$.

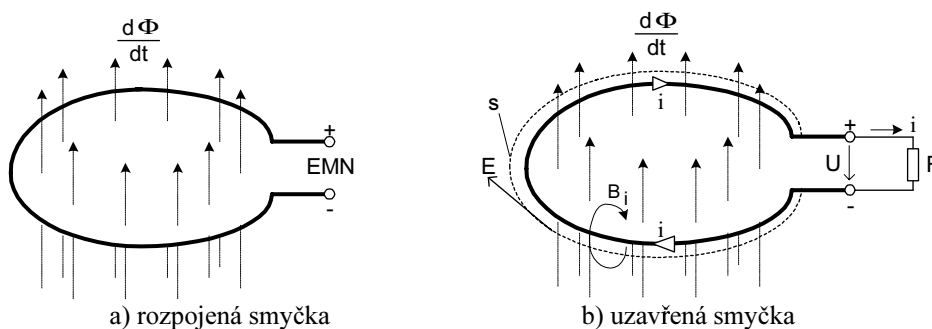
Poznámka

V technické praxi není energetická účinnost vždy jednoznačně chápána. Platí, že $\eta < 1$.

PE2.5 Vlastní indukce – vlastní indukčnost [6], [12]

PE2.5.1 Vlastní indukce

Je to fyzikální jev popsáný Maxwellovou rovnicí tvaru $\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = EMN = -\frac{d\Phi}{dt}$. Jev byl experimentálně zjištěný Faradayem v r. 1831 (Faradayův indukční zákon).



Obr. PE2.5.1.1 K jevu vlastní indukce

Je-li v časově proměnném mg. indukčním toku $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$ vodivá smyčka délky s , vyvolá v ní doprovázející el. vírové pole o intenzitě E , kdy $\left(\int E \cdot ds \neq 0\right)$ elektromotorické napětí EMN. Indukovaný proud i vyvolá vlastní mg. pole o indukci B_i které je opačného směru než mg. pole původní (Lenzův zákon).

Děj lze vysvětlit tak, že časovou změnou mg. pole vznikne pole elektrické E , které uvede volné elektrony ve smyčce do pohybu. Elektrony se pohybují po uzavřené dráze smyčky, čímž vzniká el. proud, neboť náboj elektronů dQ projde průřezem vodiče za čas dt $\left(i = \frac{dQ}{dt}\right)$. V případě, že bude smyčka otevřená, bude na jednom konci nadbytek elektronů, na druhém konci jejich nedostatek (kladný pól).

PE2.5.2 Vlastní indukčnost

Vlastní (též prostá) indukčnost je definována jako konstanta ve vztahu mezi magnetickým indukčním tokem Φ a elektrickým proudem I , který tento magnetický tok způsobil.

$$\Phi = L \cdot I,$$

z čehož je indukčnost

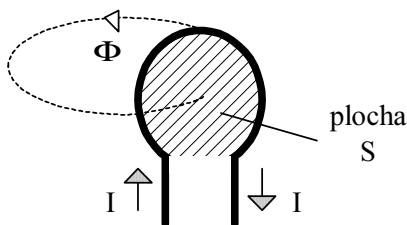
$$L = \frac{\Phi}{I},$$

kde L je konstanta úměrnosti předchozí rovnice.

Indukčnost L je skalární veličinou uvádějící do vztahu proudovodič s jeho magnetickým polem.

Indukčnost závitů

Uvažujme proudovodič stočený do smyčky.



Obr. PE2.5.2.1 Proudová smyčka – závit

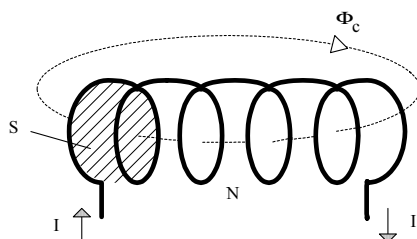
Např. podle [4], [6], [12] platí $\Phi = B \cdot S = L \cdot I$, kde $B = \mu_0 \cdot H$, $\int H \cdot dl = I$, z čehož statická definice vlastní

indukčnosti je $L_s = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \cdot \frac{H \cdot S}{I} = \mu_0 \cdot \frac{S}{l}$.

Jak je vidět ze vztahu, hodnota vlastní indukčnosti je dána geometrickými rozměry vodiče a materiálovými vlastnostmi prostředí, v němž se nachází. Nezávisí tedy na velikosti procházejícího proudu.

Indukčnost sériového solenoidu

Nechť je solenoid tvořen sériovým spojením N proudových smyček tak, že tentýž magnetický indukční tok Φ obepíná všech N smyček (neuvažujeme rozptylový magnetický tok).



Obr. PE2.5.2.2 Sériový solenoid

Celkový magnetický tok je

$$\Phi_c = N \cdot \Phi = L_c \cdot I = B_c \cdot S_c.$$

Pro těsnou vazbu platí

$$S_c = N \cdot S,$$

$$B_c = N \cdot B = \mu_0 \cdot N \cdot H = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}.$$

Statická definice vlastní indukčnosti je

$$L_c = \frac{\Phi_c}{I} = \mu_0 \cdot \frac{S}{l} \cdot N^2.$$

Dosažením za magnetický odpor (reluktanci)

$$R_m = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l}{S},$$

nebo magnetickou vodivost (permeanci)

$$G_m = \frac{1}{R_m} = \mu_0 \cdot \frac{S}{l}$$

nakonec dostaneme

$$L_c = \frac{N^2}{R_m} = G_m \cdot N^2.$$

Vztah udává statickou definici vlastní indukčnosti solenoidu.

Poznámka:

Všimněme si, že hodnota vlastní indukčnosti je i v tomto případě určena geometrickými rozměry, materiálovými vlastnostmi prostředí a nezávisí na velikosti protékajícího elektrického proudu.

V technické literatuře se výraz $\mu \cdot \frac{S}{l} = A_L$ udává v tabulkách a představuje indukčnost jednoho závitů.

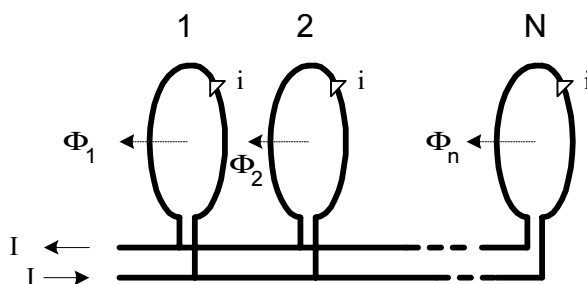
Závislost na čtverci počtu závitů lze vysvětlit následujícím způsobem.

Zdvojnásobíme-li např. počet závitů, zdvojnásobíme tím magnetickou indukci B_c a také zdvojnásobíme plochu S_c . Celkový magnetický indukční tok Φ_c se proto zvětší čtyřikrát, protože $\Phi_c = B_c \cdot S_c$. Tolikrát se též zvětší celková indukčnost solenoidu.

V technické praxi neplatí vlivem rozptylu podmínka $\Phi_c = N \cdot \Phi$, nýbrž je vždy $\Phi_c < N \cdot \Phi$.

Indukčnost paralelního solenoidu

Uvažujme solenoid vytvořený proudovými smyčkami s paralelním napájením.



Obr. PE2.5.2.3 Paralelní solenoid

Pro shodné rozměry a vlastnosti závitů platí $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_n = \Phi_i$. Uvažujme, že geometrické rozměry i vlastnosti smyček u sériového i paralelního solenoidu jsou shodné. Tzn., že i indukčnosti jejich smyček budou shodné, protože závisí na geometrických rozměrech a nikoliv na protékajícím proudu. Nechť je proud jednou smyčkou – závitem $i = \frac{I}{n}$.

Mg. indukční tok jedné smyčky bude $\Phi_i = L_s \cdot i = L_s \cdot \frac{I}{n} = \frac{1}{n} \cdot \Phi$. Nechť jsou všechny smyčky připojeny tak, že

celkový mg. tok paralelního solenoidu je $\Phi_c = \sum_{i=1}^N \Phi_i = n \Phi_i = \Phi$. Vlastní indukčnost paralelního solenoidu bude

$$L_s = \frac{\Phi}{I} = \frac{B \cdot S}{I} = \mu_0 \cdot \frac{H \cdot S}{I} = \mu_0 \cdot \frac{S}{l},$$

kde intenzita mg. pole smyčky je $H = \frac{I}{l}$.

Celková vlastní indukčnost paralelního solenoidu je rovna vlastní indukčnosti jedné smyčky sériového solenoidu a nemá tedy praktické uplatnění v elektrotechnice.

Poznámka

Výhoda řešení paralelního solenoidu je v jeho redundanci. Dojde-li např. k přerušení jedné smyčky, na výsledném parametru (indukčnosti) se projeví poklesem hodnoty indukčnosti o $\Delta L = -\left(\frac{1}{n}\right) \cdot L$, kdežto u sériového solenoidu vlivem nulové redundance dojde k porušení jeho funkce. Vlastnosti paralelního uspořádání využívají živé organizmy např. při řešení krevního řečiště.

PE2.5.3 Typy vlastních indukčností

V teorii elektrických obvodů lze naléznout více definic vlastní indukčnosti.

Statická definice indukčnosti

Z předchozího lze psát

$$L_s = \frac{\Phi}{I} \left[\frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega \cdot s = H \right].$$

Jednotka indukčnosti je henry, označení H.

Dynamická definice indukčnosti

Je dána vztahem mezi časově proměnným elektrickým proudem a indukovaným napětím na indukčnosti

$$u_L = L \cdot \left(\frac{di}{dt} \right) \rightarrow L_{dyn} = \frac{u_L}{\left(\frac{di}{dt} \right)} \left[\frac{V}{\frac{A}{s}} = \Omega \cdot s = H \right].$$

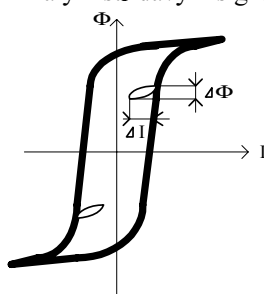
Energetická definice indukčnosti

Energie akumulovaná v induktoru je rovna práci, kterou je potřeba vykonat k vytvoření magnetického pole. Je dána vztahem

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \rightarrow L_w = \frac{2W_L}{I^2} \left[\frac{J}{A^2} = \frac{V \cdot A \cdot s}{A^2} = \Omega \cdot s = H \right].$$

Vratná (reverzibilní) indukčnost

Je definována pro magnetické obvody při buzení malým střídavým signálem v okolí pracovního bodu.



Obr. PE2.5.3.1 Ke stanovení reverzibilní (vratné) indukčnosti

Pro vratnou indukčnost platí
$$L_v = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta I} = \frac{d\Phi}{dI} \neq konst.$$

Poznámka:

Při změně směru proudu přechází pracovní bod na jinou charakteristiku. Malé změny v okolí pracovního bodu na (hysteretní) smyčce probíhají po tzv. *malých hysteretních smyčkách*. Jejich sklon závisí na poloze výchozího bodu velké hysteretní smyčky.

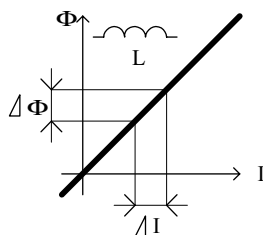
Hodnota vratné indukčnosti závisí na pracovním bodu na hysteretní smyčce a také na použitém materiálu, tj. na konkrétním tvaru hysteretní smyčky.

Hodnota vratné indukčnosti není tedy konstantní a platí, že $L_v(I)$ a není také shodná s diferenciální indukčností velké smyčky výchozího bodu.

PE2.5.4 Induktor

Je pasivním prvkem elektrických obvodů, schopným akumulovat energii magnetického pole. Ideální induktor je bezetrátovým akumulátorem energie.

Induktor bez feromagnetického jádra (vzduchové jádro)



Obr. PE2.5.4.1a Ampérweberová charakteristika induktoru se vzduchovým jádrem

Závislost $\Phi = f(I)$ má tvar přímky procházející počátkem.

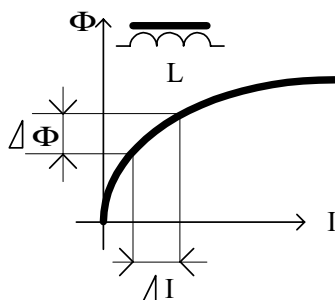
Diferenciální indukčnost je

$$L_{dif} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta I} = \frac{d\Phi}{dI} = konst.$$

Platí $\Phi = L_{dif} \cdot I$.

Hodnota diferenciální indukčnosti je konstantní v celém rozsahu pracovních bodů.

Induktor s feromagnetickým jádrem



Obr. PE2.5.4.1b Ampérweberová charakteristika induktoru s feromagnetickým jádrem

Závislost $\Phi = f(I)$ je obecně nelineární funkcí.

Diferenciální indukčnost je

$$L_{dif} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta I} = \frac{d\Phi}{dI} \neq konst.$$

Platí $\Phi = L_{dif}(I) \cdot I$.

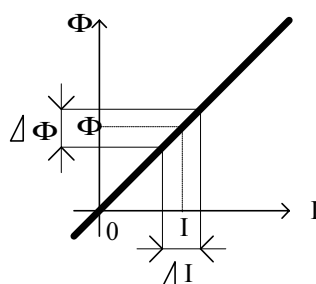
Hodnota diferenciální indukčnosti není konstantní a je závislá na poloze pracovního bodu.

Poznámka:

Základní charakteristikou induktoru je vztah mezi magnetickým tokem $\Phi(I)$ a proudem I . Grafické zobrazení vztahu $\Phi(I)$ se nazývá ampérweberovou charakteristikou.

PE2.5.5 Porovnání indukčností

Vlastní indukčnost statická a diferenciální u lineárního induktoru



Obr. PE2.5.5.1 Ke stanovení vlastní indukčnosti lineárního induktoru

Uvažujme harmonické buzení lineární indukčnosti.

Pro magnetický tok lze psát

$$\Phi_{ef} = L_s \cdot I_{ef}.$$

Z definice diferenciální indukčnosti platí

$$L_{dif} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta I} = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{d}{dI} (L_s \cdot I_{ef}),$$

z čehož

$$L_{dif} \equiv L_s.$$

Pro lineární induktor mají obě indukčnosti stejnou velikost.

Vlastní indukčnost statická a energetická u lineárního induktoru

Z definice statické indukčnosti lze psát

$$L_s = \frac{\Phi}{I}.$$

Energie magnetického pole akumulovaná v tomto induktoru je

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L_s \cdot I^2,$$

z čehož je energetická indukčnost

$$L_W = \frac{2W_L}{I^2} \equiv L_s.$$

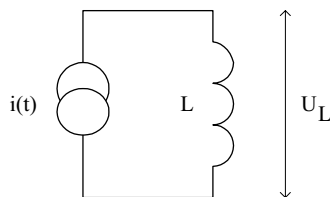
Pro lineární induktor mají obě indukčnosti stejnou velikost.

Poznámka:

Nezáleží tedy, jakým způsobem je indukčnost definována. Zavedení energetické definice má opodstatnění v případě, jsou-li známy proud a hodnota akumulované energie, což v technické praxi nebývá častým případem.

Vlastní indukčnost statická a dynamická u lineárního induktoru

Uvažujme budící proud lineárním induktorem ve tvaru $i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$.



Obr. PE2.5.5.2 K harmonickému buzení induktoru

Pro statickou indukčnost je maximální napětí na induktoru

$$U_{Lm} = Z \cdot I_m = \omega \cdot L_s \cdot I_m.$$

Na indukčnosti se naindukuje napětí

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt}(I_m \cdot \sin \omega t) = \omega \cdot L_{dyn} \cdot I_m \cdot \cos \omega t,$$

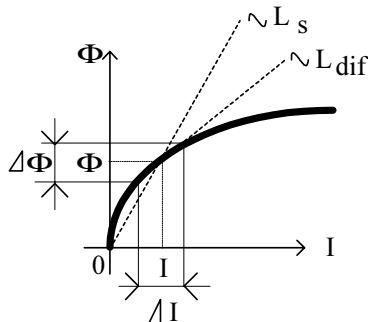
kde maximální napětí je

$$U_{Lm} = \omega \cdot L_{dyn} \cdot I_m.$$

Porovnáním vztahů pro maximální napětí vyplývá

$$L_{dyn} \equiv L_s.$$

Pro harmonické buzení u lineárního induktoru jsou hodnoty statické i dynamické indukčnosti shodné.

Vlastní indukčnost statická a diferenciální u nelineárního induktoru

Obr. PE2.5.5.3 Ke stanovení statické a diferenciální indukčnosti

Pro statickou indukčnost platí

$$L_s = \frac{\Phi(I)}{I} = L(I).$$

Pro diferenciální indukčnost platí

$$L_{dif} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta I} = \frac{L(I) \cdot \Delta I}{\Delta I} = L(I).$$

Vyplývá tedy, že je $L_{dif}(I)$.

Pro nelineární induktor jsou hodnoty statické i diferenciální indukčnosti závislé na pracovním bodu a v daném pracovním bodu si nejsou rovny. Na tuto skutečnost ukazují rozdílné hodnoty směrnic závislosti $\Phi(I)$ pro statickou a diferenciální indukčnost v daném pracovním bodu.

Poznámka:

V technické praxi se indukčnost s feromagnetickým (feritovým) jádrem určuje pomocí tzv. součinitele indukčnosti A_L . Hodnota A_L je rovna indukčnosti solenoidu o jednom závitě daného rozměru a tvaru, umístěného v dané poloze. Hodnota (vlastní) indukčnosti se určí ze vztahu $L = A_L \cdot N^2$, kde je A_L součinitel indukčnosti v H, a N je počet závitů solenoidu. Hodnoty součinitele indukčnosti jsou pro jednotlivé typy jader tabelizovány výrobcem.

Poznámka

Jednoznačně je určena hodnota vlastní indukčnosti u lineárního induktoru, tj. bez feromagnetického jádra. Tehdy všechny typy vlastních indukčností jsou shodné s hodnotou statické indukčnosti.

Při měření vlastní indukčnosti nelineárního induktoru jsou naměřené hodnoty závislé na pracovním bodu, tj. na velikosti protékajícího proudu. Pro měření nelineárního induktoru je potřeba volit měřicí metodu, která používá co nejmenší hodnotu ΔI . Vhodné jsou proto měřiče používající můstkové metody. Ty pracují v okolí počátku $\Phi(I)$ charakteristiky. Všechny definice vlastních indukčností mají jednotku henry – H.

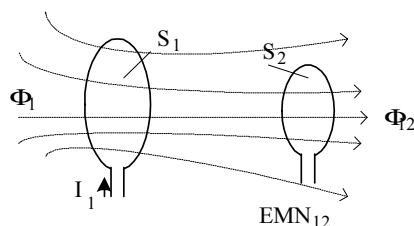
Pro jednoduchost jsou uvažovány vlastní indukčnosti ideální, kdy mezi indukovaným napětím a proudem je fázový úhel $\pi / 2$. V technické praxi je ale fázový úhel vždy menší o tzv. *ztrátový úhel* představující ztráty (hysterezní, vířivými proudy a Jouleho ztrátami ve vinutí).

Poznámka

Americký experimentální fyzik Joseph Henry (1797–1878) prováděl výzkum magnetizmu, objevil samoindukci, objevil elektrické relé, prováděl meteorologická pozorování.

PE2.6 Vzájemná indukce – vzájemná indukčnost [6]

Jevem vzájemné indukce se rozumí vzájemné induktivní působení. Jde o fyzikální jev představující spojení dvou prvků mg. polem.



Obr. PE2.6.1 Mg. indukční tok z 1. do 2. smyčky

Uvažujme případ $I_1 = konst.$

Mg. indukční tok druhou smyčkou bude $\Phi_{12} = \iint_{S_2} B_1 \cdot dS_2$.

Nemění-li polohy obou smyček platí $\frac{\Phi_{12}}{I_1} = konst. = L_{12}$.

Mění-li se proud I_1 s časem $\left(\frac{dI_1}{dt} \neq 0\right)$, bude ve druhé smyčce indukované elektromotorické napětí

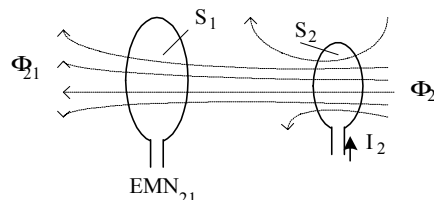
$$EMN_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \cdot \frac{dI_1}{dt},$$

Kde L_{12} je koeficient vzájemné indukce nazvaný vzájemná indukčnost.

Pro 1. smyčku (aktivní) platí $\Phi_1 = L_1 \cdot I_1$, pro 2. smyčku (pasivní) platí $\Phi_{12} = L_{12} \cdot I_1$. Jejich poměr bude $\frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{L_{12}}{L_1}$.

V případě, že oba mg. indukční toky budou shodné (těsná vazba), bude $L_{12} = L_1$, tj. $M = L_1$. Vzájemná indukčnost, tj. indukčnost pasivní smyčky bude rovna indukčnosti aktivní smyčky.

Opačný případ nastane, když budící (aktivní) smyčkou je druhá smyčka.



Obr. PE2.6.2 Mg. indukční tok z 2. do 1. smyčky

Mg. indukční tok vzbuzený proudem I_2 druhé smyčky v 1. smyčce je $\Phi_{21} = \iint_{S_1} B_2 \cdot dS_1$.

Nemění-li se vzájemná poloha smyček, bude $\frac{\Phi_{21}}{I_2} = konst. = L_{21}$.

Mění-li se proud I_2 s časem $\left(\frac{dI_2}{dt} \neq 0\right)$, bude ve druhé smyčce indukované napětí

$$EMN_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \cdot \frac{dI_2}{dt},$$

Kde L_{21} je koeficient vzájemné indukce, nazvaný vzájemná indukčnost.

Poznámka

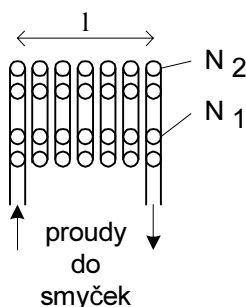
Vzájemná indukčnost se v technické praxi označuje M . Udává indukčnost pasivní smyčky jak se jeví ze strany aktivní smyčky.

Při indexovém označení se vychází ze směrového principu *odkud – kam*.

Indukční vazba je „spojení“ mezi dvěma smyčkami mg. polem. Tato vazba bude tím větší, čím více se bude poměr $\left(\frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} \rightarrow 1\right)$ nebo $\left(\frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} \rightarrow 1\right)$ blížit jedničce. Bude-li platit $\left(\frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = 1\right)$ nebo $\left(\frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} = 1\right)$, mluví se o tzv. *těsné vazbě*.

Vzájemná indukčnost M

Uvažujme dva solenoidy s těsnou vazbou podle obr. (solenoidy jsou nasunuty na sobě)



Obr. PE2.6.3 K vzájemné indukčnosti M

Proud (I_1) v jednom závitu 2. solenoidu vybudí mg. indukční tok $\Phi_{12} = B_1 \cdot S = \mu \cdot H_1 \cdot S = \mu \cdot \frac{N_1 \cdot I_1}{l} \cdot S$, což se též rovná $\Phi_{12} = L_{12} \cdot I_1 = M \cdot I_1$, kde $M \equiv L_{12}$ je tzv. *vzájemná indukčnost*. Bude-li mít 2. solenoid N_2 závitů lze psát $N_2 \cdot \Phi_{12} = M \cdot I_1$. Dosazením za Φ_{12} dostaneme

$$M = \mu \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{l} \cdot S.$$

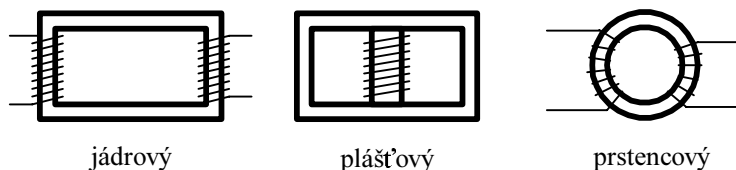
Poznámka

Vzájemná indukčnost M je úměrná počtu závitů obou solenoidů, ploše S a nepřímo úměrná délce solenoidu l . Tato rovnice platí ale pouze pro těsnou vazbu.

Michael Faraday (1791–1867) je nejvýznamnější anglický experimentální fyzik. Objevil chemické účinky el. proudu, elektromagnetickou indukci, zavedl pojem el. a mg. siločáry, vysvětlil vznik elektromotorického napětí v galvanickém článku, objevil elektrické a magnetické silové účinky v látkách. Zjistil antimagnetismus látek. Použil elektrostatické stínění, dnes známé jako Faradayova klec. Jeho experimenty se staly základem moderní elektrotechniky.

PE2.7 Transformátor, tlumivka, reaktor [2], [6]

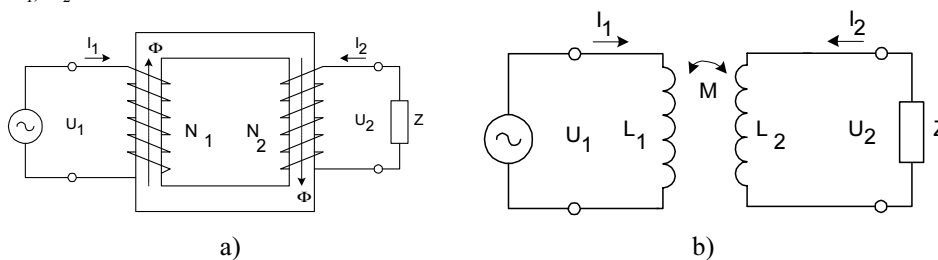
Transformátor je el. zařízení bez pohyblivých částí využívající jevu elektromagnetické indukce. Energie se ze vstupního (primárního) vinutí do výstupního (sekundárního) přenáší prostřednictvím společného mg. toku. U zdrojů a zvláště pak u zdrojů střídavých patří transformátor mezi nejpoužívanější el. součásti. Navrhují se jako jednofázové nebo třífázové. Konstrukčně se dělí na jádrové, plášťové a prstencové (toroidní).



Obr. PE2.7.1 Typy feromagnetických jader

Jádrový typ se vyznačuje větším rozptylem, ale je vhodnější pro VN aplikace, plášťový typ má menší rozptyl a tím větší účinnost, ale není vhodný pro VN (vzhledem k zajištění izolace mezi vinutími).

V našem případě budeme uvažovat transformátor jednofázový a *bezeztrátový*, tvořený dvěma vinutími o N_1 , N_2 závitech s indukčnostmi L_1 , L_2 a s indukční vazbou M .



Obr. PE2.7.2 K principu transformátoru,
a) Mg. Obvod jednofázového transformátoru jádrového typu,
b) Náhradní zapojení (model) bezeztrátového transformátoru

Pro okamžité hodnoty bezeztrátového transformátoru lze psát

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

Pro harmonické signály a ustálený stav pak

$$U_1(j\omega) = j\omega L_1 \cdot I_1(j\omega) \pm j\omega M \cdot I_2(j\omega)$$

$$U_2(j\omega) = j\omega L_2 \cdot I_2(j\omega) \pm j\omega M \cdot I_1(j\omega)$$

Zavedením operátorového tvaru ($p = j\omega$) se zápis zjednoduší na tvar algebraické rovnice tvaru

$$U_1(p) = pL_1 \cdot I_1(p) \pm pM \cdot I_2(p)$$

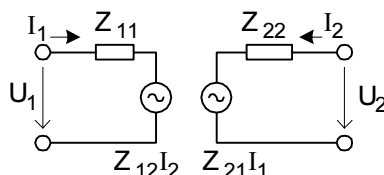
$$U_2(p) = pL_2 \cdot I_2(p) \pm pM \cdot I_1(p)$$

Impedanční vyjádření

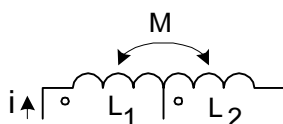
Předchozí rovnice lze napsat v symbolickém zápisu tvaru impedanční matice

$$U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$

$$U_2 = Z_{22} \cdot I_2 + Z_{21} \cdot I_1$$



Obr. PE2.7.3 Náhradní obvod aperiodického transformátoru ve tvaru dvojbranu

Znaménko u vzájemné indukčnosti M

Obr. PE2.7.4 K vzájemné indukčnosti M **Poznámka**

Mějme solenoid, který je vinutý v jednom směru a uprostřed má odbočku. Nechť levá část má indukčnost L_1 , pravá část L_2 , celý solenoid má indukčnost $L = L_1 + L_2 + 2M$. Znaménka u členů ($\pm M$) se volí podle smyslu vinutí. Jestliže i_1, i_2 protékají vzhledem ke společnému mg. toku ve stejném směru, volí se znaménko $(+M)$, jsou-li proudy navzájem opačné, pak $(-M)$.

Transformační vztahy

Pro bezztrátový transformátor platí, příkon je roven výst. výkonu, tj. $P_1 = P_2$, z čehož platí $U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2$. Protože napětí je úměrné počtu závitů, platí $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = p$ (transformační poměr), z čehož dále $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{p}$. Protože indukčnosti

jsou úměrné čtverci počtu závitů, platí též $p = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$.

Režim naprázdno

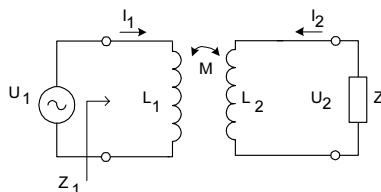
Pro režim naprázdno bezztrátového transformátoru lze pro primár psát $P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi = 0$, z čehož $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Primár transformátoru naprázdno se tedy chová jako ideální induktor.

Režim se zátěží

V režimu naprázdno se primár chová jako indukčnost L_1 . Při zátěži vlivem vzájemné indukčnosti M a proudů I_2 dojde ke změně primární indukčnosti, jak to ukáže následující postup. Uvažujeme pro zjednodušení operátorový tvar zápisu

$$U_1(p) = pL_1 \cdot I_1(p) \pm pM \cdot I_2(p)$$

$$U_2(p) = pL_2 \cdot I_2(p) \pm pM \cdot I_1(p)$$

Obr. PE2.7.5 K transformaci zátěže Z do primáru

Pro výstupní obvod lze psát $-U_2 - Z \cdot I_2 = 0$, z čehož $U_2 = -Z \cdot I_2$. Dosadíme do druhé rovnice a po úpravě dostaneme

$$U_1 = pL_1 \cdot I_1 + pM \cdot I_2$$

$$0 = pM \cdot I_1 + (pL_2 + Z) \cdot I_2$$

Z 2. rovnice určíme $I_2 = -\frac{pM}{pL_2 + Z} \cdot I_1$ a dosadíme do 1. rovnice $U_1 = pL_1 \cdot I_1 + pM \cdot \frac{-pM}{pL_2 + Z} \cdot I_1$. Upravíme na tvar

$$U_1 = \left[pL_1 - \frac{(pM)^2}{pL_2 + Z} \right] \cdot I_1, \text{ z čehož vst. impedance při zátěži je}$$

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \left[pL_1 - \frac{(pM)^2}{pL_2 + Z} \right].$$

Ze vztahu je vidět, že primární indukčnost je zmenšena o druhý člen v závorce.

$$\text{Výraz v závorce dále upravíme } Z_1 = \frac{p^2 L_1 L_2 + pL_1 Z - (pM)^2}{pL_2 + Z} = \frac{pL_1 Z + p^2 (L_1 L_2 - M^2)}{pL_2 + Z}.$$

Rozdíl v čitateli v závorce udává vliv vzájemné indukce. Položíme výraz v závorce nule, tj. $L_1 \cdot L_2 - M^2 = 0$, z čehož

$$k^2 \cdot (L_1 \cdot L_2) = M^2, \text{ kde } k \text{ je činitel vazby, tj. } k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \text{ Jeho hodnota se pohybuje } k \in (0 \rightarrow 1). \text{ Když je } k = 1,$$

mluví se o *těsné vazbě* ($M = \sqrt{L_1 L_2}$), když $k < 1$, mluví se o *volné vazbě*.

Poznámka

Jestliže je k činitelem vazby, pak $\delta = 1 - k^2$ lze definovat jako *činitele rozptylu*, kde rozptylová indukčnost je $L_r = \delta \cdot L_1$. Měřením bychom zjistili kmitočtovou závislost rozptylu. Ta je dána skutečností, že při vysokých kmitočtech Weissovy domény jádra již nestačí sledovat změny elektromagnetického pole, dochází k jejím vyzařování a tím ke zmenšování činitele vazby.

Činitel vazby

Umožňuje posouzení míry vzájemného působení indukčnosti L_1, L_2 . Činitel vazby dvou obvodů je definován vztahem

$$k = \frac{X_v}{\sqrt{X_1 \cdot X_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}.$$

Zvětšení činitele vazby lze docílit zmenšením rozptylu, tj. přiblížením L_1, L_2 . Těsné vazby ($k \approx 1$) lze dosáhnout navinutím L_1, L_2 na společné mg. jádro, příp. tzv. bifilárním vinutím (pozor při VN).

Režim naprázdno ($Z = \infty$) Vst. Impedance $Z_1 = pL_1$.

Režim nakrátko ($Z = 0$) Vst. Impedance $Z_1 = \frac{p^2(L_1L_2 - M^2)}{pL_2}$. Pro $k = 1$ je $Z_1 = 0$.

Vstupní impedance jako funkce vzájemné indukčnosti

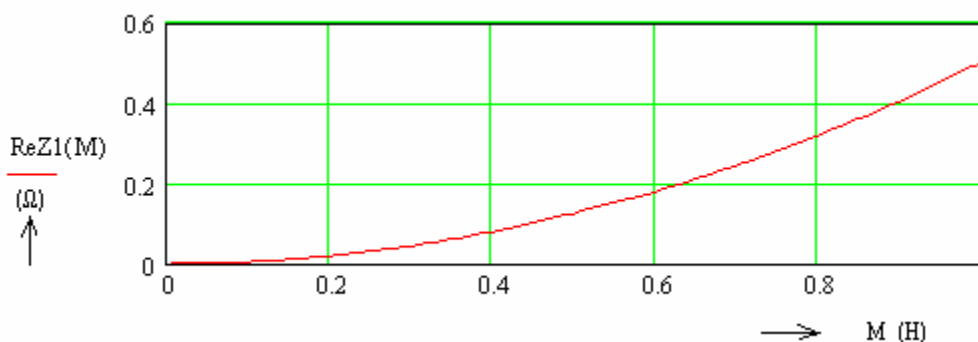
Vyjdeme ze vztahu $Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \left[pL_1 - \frac{(pM)^2}{pL_2 + Z} \right]$, který rozšíříme na tvar

$$Z_1(M) = \left[j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{(Z + j\omega L_2)} \cdot \frac{(Z - j\omega L_2)}{(Z - j\omega L_2)} \right] = j\omega L_1 + \frac{Z \cdot (\omega M)^2}{Z^2 + (\omega L_2)^2} - j \frac{\omega L_2 \cdot (\omega M)^2}{Z^2 + (\omega L_2)^2}.$$

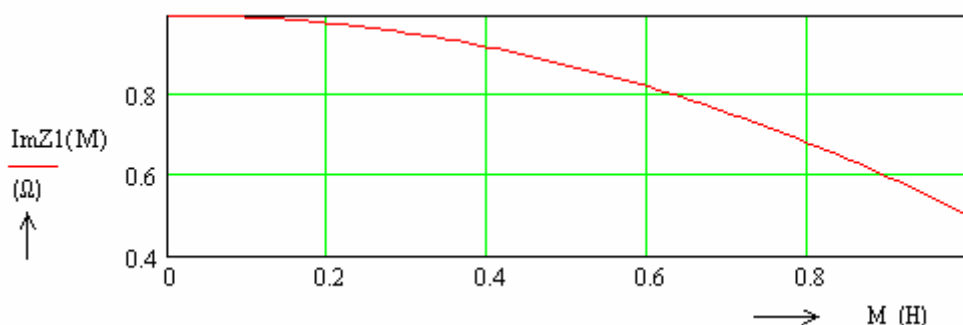
Použijeme vztahy $\omega M = X_v$, $\omega L_1 = X_1$, $\omega L_2 = X_2$, které dosadíme

$$\overline{Z_1(M)} = \frac{Z}{Z^2 + X_2^2} \cdot X_v^2 + j \left(X_1 - \frac{X_2}{Z^2 + X_2^2} \cdot X_v^2 \right) = \text{Re } \overline{Z_1(M)} + j \text{Im } \overline{Z_1(M)}.$$

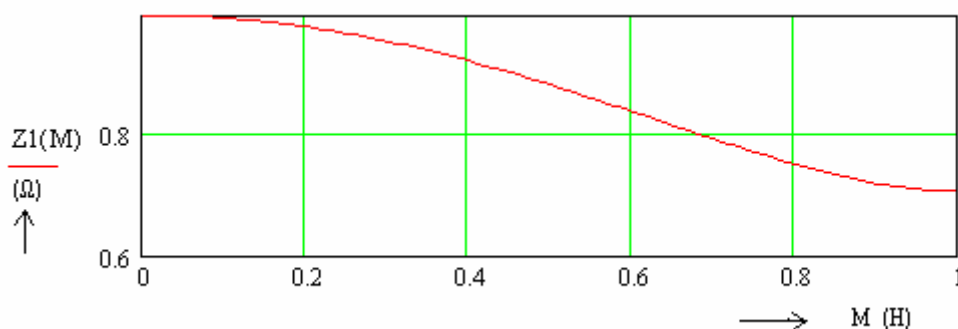
Ze vztahu je vidět, že i bezetrátový transformátor má při zatížení vst. impedanci s reálnou (ztrátovou) částí. To je dáno transformací zátěže do primárního obvodu. Vlastní indukčnost M zvětšuje reálnou část a zmenšuje imaginární část vst. impedance Z_1 . Působení sekundárního obvodu na primární se projeví zhoršením činitele jakosti vst. impedance primáru.



Obr. PE2.7.5 Průběh reálné části vstupní impedance transformátoru pro $Z = 1 \Omega$



Obr. PE2.7.6 Průběh imaginární části vstupní impedance transformátoru pro $Z = 1 \Omega$

Obr. PE2.7.7 Průběh modulu vstupní impedance transformátoru pro $Z = 1 \Omega$

Reálná část vst. impedance v závislosti na vzájemné indukčnosti se zvětšuje, imaginární část vst. impedance se zmenšuje a modul vst. impedance se také zmenšuje.

Přenos napětí při zátěži

$$U_1 = pL_1 \cdot I_1 + pM \cdot I_2$$

$$U_2 = pL_2 \cdot I_2 + pM \cdot I_1$$

Opět dosadíme $U_2 = -Z \cdot I_2$, z čehož $I_2 = -\frac{U_2}{Z}$.

Upravíme 1. rovnici $pL_1 I_1 = U_1 - pM I_2$, z čehož $I_1 = \frac{U_1 - pM I_2}{pL_1}$. Dosadíme za I_2 a I_1 do 2. rovnice a dostaneme

$$U_2 = pM \cdot \frac{U_1 - pM I_2}{pL_1} + pL_2 I_2 = \frac{pM U_1}{pL_1} - \frac{p^2 M^2}{pL_1} \cdot \left(-\frac{U_2}{Z}\right) - \frac{pL_2}{Z} \cdot U_2.$$

$$U_2 \cdot \left(1 + \frac{pL_2}{Z} - p \frac{M^2}{L_1 \cdot Z}\right) = \frac{M}{L_1} \cdot U_1. \text{ Přenos napětí při zátěži pak bude dán po úpravě vztahem}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{M \cdot Z}{p(L_1 L_2 - M^2) + L_1 \cdot Z}.$$

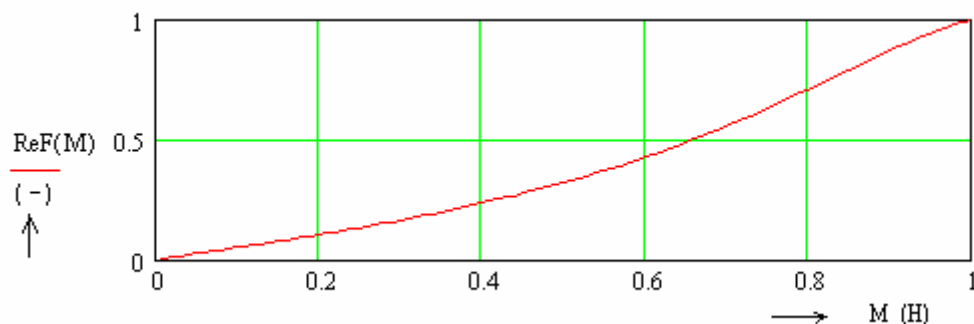
Vztah pro přenos napětí je komplexní funkcí tvaru $F(M) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{c}{a + jb}$. Proto si ho rozšíříme na tvar

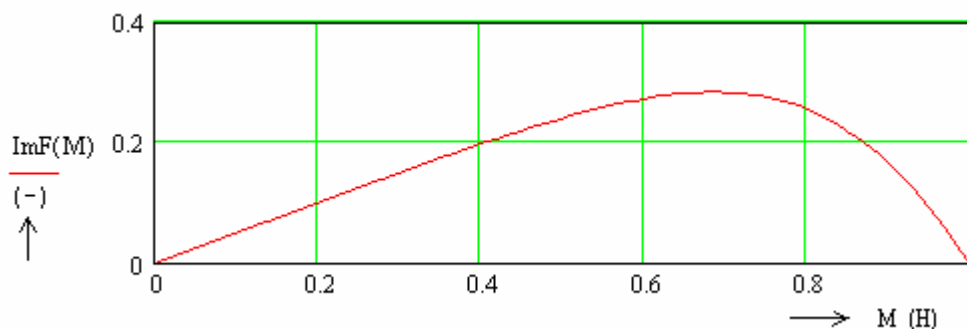
$$\overline{F(M)} = \frac{L_1 \cdot M \cdot Z^2}{(L_1 Z)^2 + \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)^2} - j \omega \frac{M \cdot Z \cdot (L_1 L_2 - M^2)}{(L_1 Z)^2 + \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)^2} = \text{Re } \overline{F} - j \text{Im } \overline{F}.$$

Příklad

Uvažujme případ zatíženého bezztrátového transformátoru s hodnotami $L_1 = 1H$, $L_2 = 1H$, $Z = 1\Omega$, $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$, při změnách vzájemné indukčnosti v mezích $M \in (0 \div 1) H$.

Máme stanovit průběhy reálné, imaginární části a modulu napěťového přenosu $|\overline{F(M)}|$.

Obr. PE2.7.8 Průběh reálné části přenosu napětí transformátoru pro $Z = 1 \Omega$

Obr. PE2.7.9 Průběh imaginární části přenosu napětí transformátoru pro $Z = 1 \Omega$

Stanovení extrému (maxima) $\text{Im}F(M)$

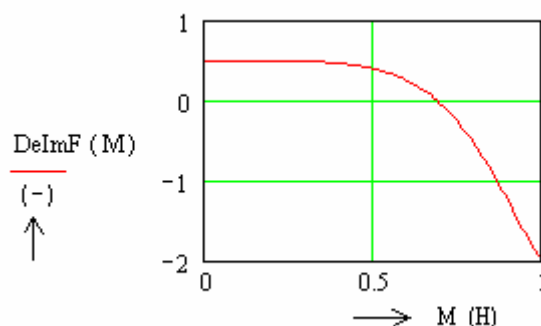
Pro imaginární část přenosu napětí zatíženého bezeztrátového transformátoru lze s použitím předchozích vztahů psát

$$\text{Im} F(M) = \omega \frac{M \cdot Z \cdot (L_1 L_2 - M^2)}{(L_1 Z)^2 + \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)^2}.$$

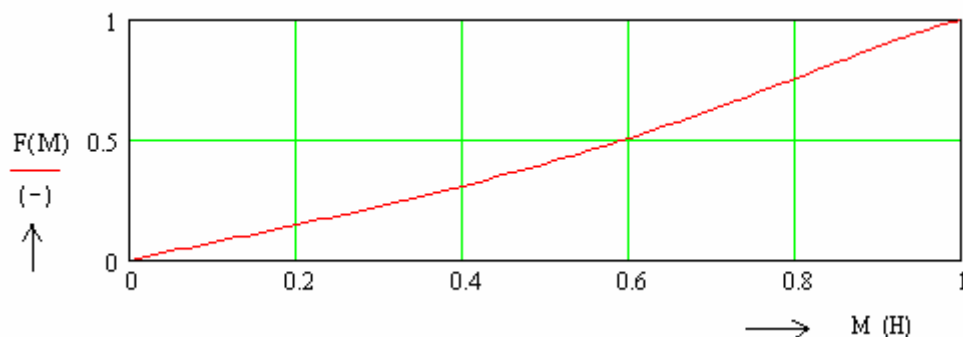
Extrém hledáme standardním způsobem, tj. nejprve stanovíme 1. derivaci $\frac{d}{dM}[\text{Im} F(M)]$, položíme ji rovnou nule, tj.

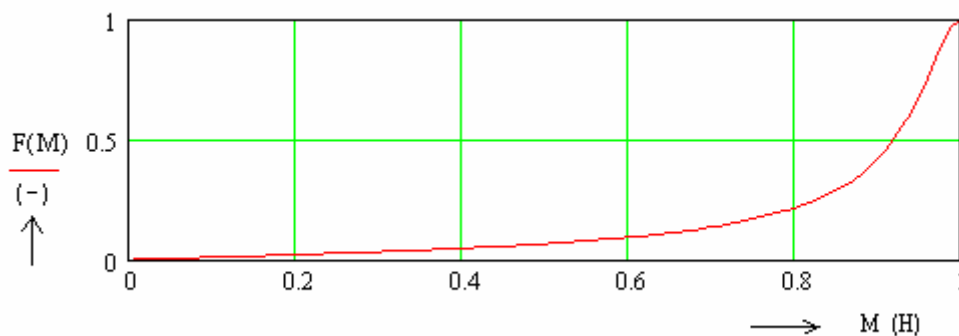
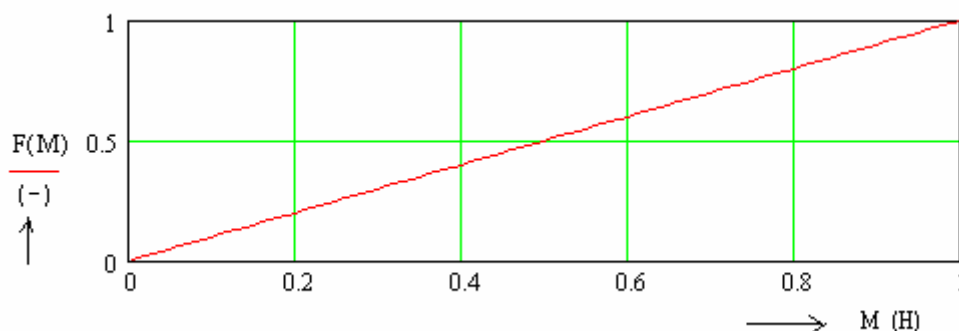
$\frac{d}{dM}[\text{Im} F(M)] = 0$ a najdeme kořen. Nalezená 1. derivace je tvaru

$$\frac{d}{dM}[\text{Im} F(M)] = \frac{\omega \cdot Z \cdot (L_1 \cdot L_2 - M^2)}{[(L_1 \cdot Z)^2 + \omega^2 \cdot (L_1 \cdot L_2 - M^2)^2]} - \frac{2\omega \cdot Z \cdot M^2}{[(L_1 \cdot Z)^2 + \omega^2 \cdot (L_1 \cdot L_2 - M^2)^2]^2} + \frac{4\omega^3 \cdot Z \cdot M^2 \cdot (L_1 \cdot L_2 - M^2)^2}{[(L_1 \cdot Z)^2 + \omega^2 \cdot (L_1 \cdot L_2 - M^2)^2]^3}$$

Obr. PE2.7.10 Časový průběh 1. derivace imaginární části přenosu napětí transformátoru pro $Z = 1 \Omega$

Maximum imaginární části přenosu napětí nastává (pro dříve zadané parametry) pro hodnotu $M = 0,686 \text{ H}$.

Obr. PE2.7.11 Průběh modulu přenosu napětí transformátoru pro $Z = 1 \Omega$

Obr. PE2.7.12 Průběh modulu přenosu napětí transformátoru pro $Z = 0.1 \Omega$ Obr. PE2.7.13 Průběh modulu přenosu napětí transformátoru pro $Z = 10 \Omega$

Z průběhů napěťového přenosu je vidět, že čím větší je impedance zátěže, tím více se průběh modulu $F(M)$ blíží přímce s kladnou směrnici.

Opět rozlišíme případ těsné vazby ($k = 1$), kdy dostaneme $\frac{U_2}{U_1} = \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$, což představuje rovnici přímky

v závislosti na M . Přímkovou závislost pro přenos napětí dostaneme, když uvažujeme režim naprázdno ($Z = \infty$). Pro

režim nakrátko je přenos napětí roven $\frac{U_2}{U_1} = 0$, což je zřejmé.

Přenos proudu při zátěži

Vyjdeme ze soustavy rovnic popisující náhradní zapojení bezztrátového transformátoru

$$U_1 = pL_1 \cdot I_1 + pM \cdot I_2$$

$$U_2 = pL_2 \cdot I_2 + pM \cdot I_1$$

Opět využijeme vztahu pro výst. obvod $U_2 = -Z \cdot I_2$. Z 2. rovnice určíme I_1 a dosadíme

$-Z \cdot I_2 = pL_2 \cdot I_2 + pM \cdot I_1$, z čehož $0 = pM \cdot I_1 + (pL_2 + Z) \cdot I_2$, separujeme proudy $-pM \cdot I_1 = (pL_2 + Z) \cdot I_2$, z čehož

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{pL_2 + Z}{pM}.$$

Poznámka

Záporné znaménko je dáno zvolenou orientací výst. proudu.

Přenosová vodivost

Dosadíme do 2. rovnice za $I_2 = -\frac{U_2}{Z}$ a dostaneme $I_1 = -\frac{pL_2 + Z}{pM} \cdot \left(-\frac{U_2}{Z}\right) = \frac{pL_2 + Z}{pMZ} \cdot U_2 = Y_{12} \cdot U_2$.

Přenosová impedance

$$U_2 = \frac{pMZ}{pL_2 + Z} \cdot I_1 = Z_{21} \cdot I_1.$$

Vstupní impedance ideálního transformátoru ($L_1, L_2 = \infty$)

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\frac{U_2}{p}}{-p \cdot I_2} = \frac{1}{p^2} \cdot \left(-\frac{U_2}{I_2} \right) = \frac{Z}{p^2}.$$

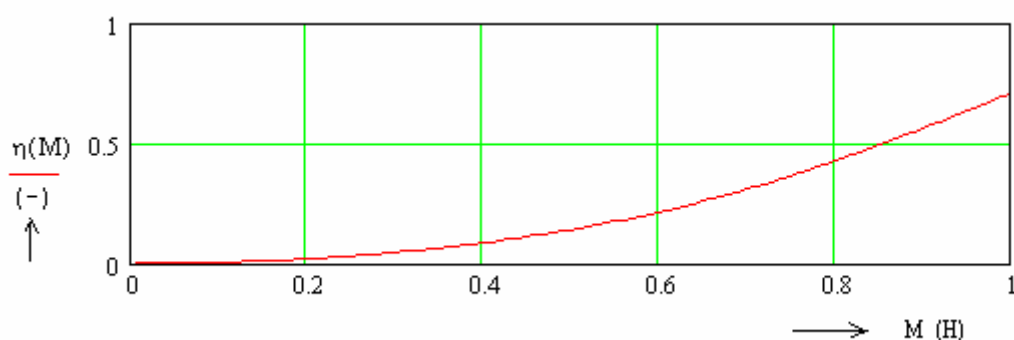
Vztah udává hodnotu přetransformované zátěže do primární strany ideálního transformátoru.

Účinnost bezztrátového transformátoru

Necht' je definována zdánlivá účinnost ve tvaru

$$\eta = \frac{S_2}{S_1} = \frac{|\vec{Z}| \cdot I_2^2}{|\vec{Z}_1| \cdot I_1^2} = \frac{\frac{U_2^2}{|\vec{Z}|}}{\frac{U_1^2}{|\vec{Z}_1|}} = \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \cdot \frac{|\vec{Z}_1|}{|\vec{Z}|}.$$

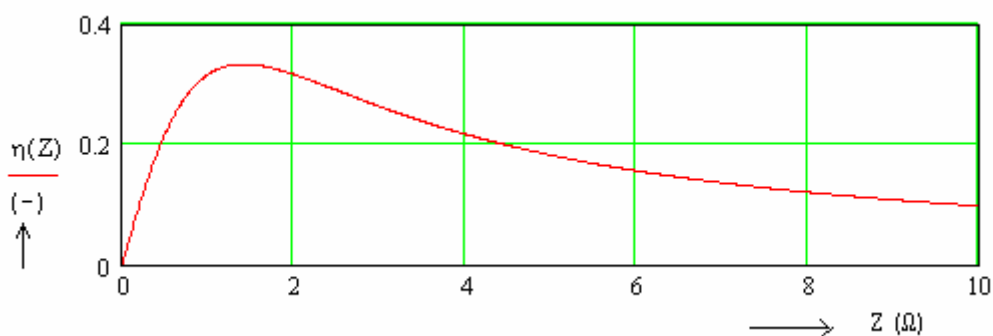
Stanovíme funkční závislost účinnosti na velikosti vzájemné indukčnosti, tj. $\eta(M)$.



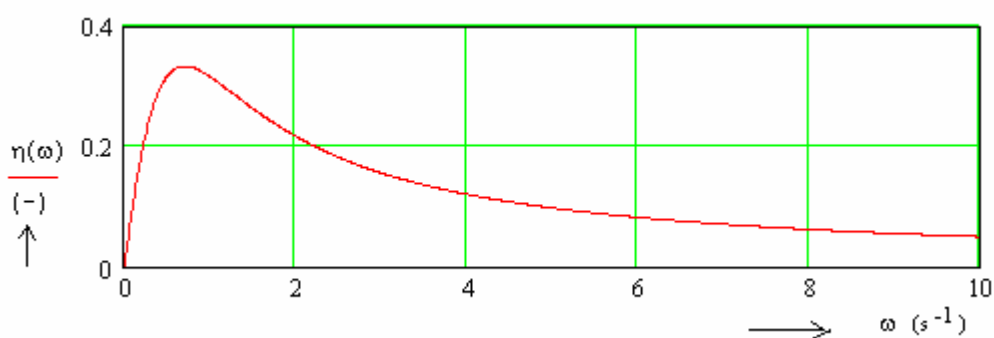
Obr. PE2.7.14 Závislost účinnosti na velikosti vzájemné indukčnosti M pro $L_1 = 1H$, $L_2 = 1H$, $Z = 1\Omega$, $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$

U zatíženého bezztrátového transformátoru je zdánlivá účinnost menší než jednička. Např. pro

$M = 0,5 \text{ H} \rightarrow \eta = 0,141$, pro $M = 0,8 \text{ H} \rightarrow \eta = 0,426$ a pro $M = 1 \text{ H} \rightarrow \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ pro dříve uvedené parametry.



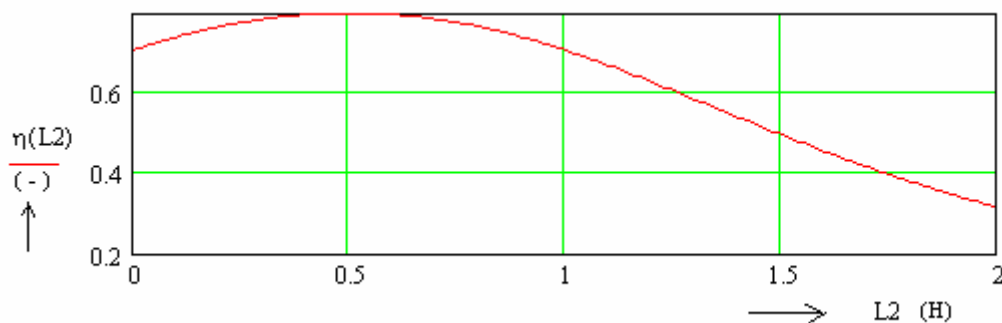
Obr. PE2.7.15 Závislost účinnosti na velikosti zátěže pro $L_1 = 1H$, $L_2 = 2H$, $M = 1H$, $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$



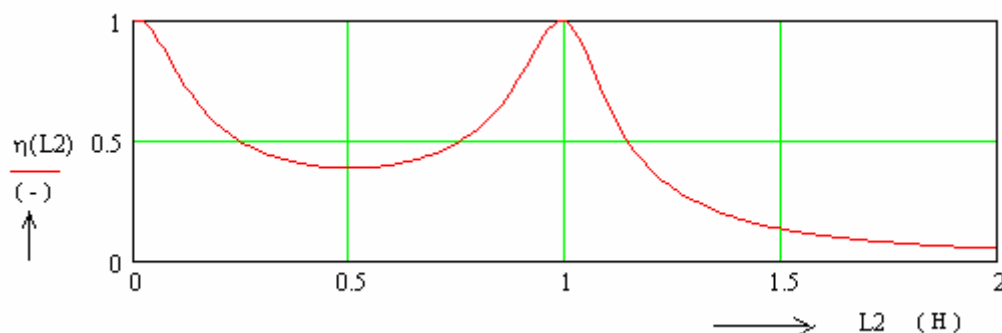
Obr. PE2.7.16 Závislost účinnosti na velikosti pracovního kmitočtu pro $L_1 = 1H$, $L_2 = 2H$, $M = 1H$, $Z = 1\Omega$

Poznámka

Závislost zdánlivé účinnosti na zátěži Z se vyznačuje maximem, taktéž je maximum v závislosti na pracovním kmitočtu ω a konstantní zátěži. V obou případech se pro dané parametry pohybují maxima účinnosti kolem 30 %.



Obr. PE2.7.17 Závislost účinnosti na velikosti indukčnosti sekundárního vinutí pro $L_1 = 1H$, $M = 1H$, $Z = 1\Omega$, $\omega = 1 s^{-1}$



Obr. PE2.7.18 Závislost účinnosti na velikosti indukčnosti sekundárního vinutí pro $L_1 = 1H$, $M = 1H$, $Z = 1\Omega$, $\omega = 10 s^{-1}$

Poznámka

Z grafů je vidět, že lze nalézt pracovní podmínky transformátoru, kdy účinnost dosahuje max. (jednotkové) hodnoty. Transformovaná zátěž i u bezeztrátového transformátoru účinnost zmenšuje v závislosti na parametrech transformátoru a jeho pracovních podmínkách.

Pojem zdánlivé účinnosti byl zaveden pro případ, že je známa impedance Z a nikoliv její reálná a imaginární část.

PE2.7.1 Indukovaná napětí v transformátoru

Uvažujme opět bezeztrátový transformátor. K vytvoření mg. indukčního toku Φ je nutno, aby primárním vinutím N_1 protékal proud I_m , tzv. *magnetizační*. Vzniklý mg. indukční tok $\Phi = \frac{F_m}{R_m}$ je daný Hopkinsonovým zákonem, kde

$F_m = N_1 \cdot I_1$ je magnetomotorické napětí, $R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}$ je mg. odpor mg. obvodu transformátoru. Předpokládejme, že je

k primárnímu vinutí připojeno střídavé napětí $u_1(t) = U_m \cdot \sin(\omega t)$. Protlačený magnetizační proud je roven $I_m = \frac{u_1(t)}{Z_1}$,

kde Z_1 je impedance primáru. Je tedy zřejmé, že se bude periodicky měnit i magnetizační proud a také mg. indukční tok. Při časové změně mg. indukčního toku dojde vlivem elektromagnetické indukce k vytvoření elektromotorického napětí,

přičemž bude platit $u_1 + EMN_1 = 0$, kde $EMN_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}$. Po dosazení dostaneme $U_m \cdot \sin(\omega t) = N_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$, z čehož

$$d\Phi = \frac{U_m}{N_1} \cdot \sin \omega t \cdot dt. \text{ Po integraci dostaneme } \Phi(t) = -\frac{U_m}{\omega N_1} \cdot \cos \omega t = \frac{U_m}{\omega N_1} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \Phi_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ze vztahu je vidět, že mg. indukční tok má shodný sinusový průběh jako vstupní (primární) napětí, je ale fázově zpožděný o $\left(\frac{T}{4}\right)$, tj. o čtvrtinu periody.

Při časové změně mg. indukčního toku dojde v sekundárním vinutí vlivem elektromagnetické indukce k vytvoření elektromotorického napětí $EMN_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$. Po dosazení za mg. indukční tok dostaneme

$$EMN_2 = -N_2 \left(-\frac{U_m}{\omega N_1} \right) \cdot \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = -\frac{N_2}{N_1} \cdot U_m \cdot \sin \omega t = \left(\frac{N_2}{N_1} \right) \cdot U_m \cdot \sin (\omega t - \pi).$$

Ze vztahu je vidět, že sekundární napětí je vůči primárnímu napětí zpožděno o $\left(\frac{T}{2} \right)$ a jeho velikost je zmenšena v poměru převodu vinutí $\left(\frac{N_2}{N_1} \right)$.

Stav při zatížení výstupu

Zatíží-li se sekundár transformátoru, začne jím protékat proud I_2 , který vyvolá vznik mg. indukčního toku Φ_2 . Ten zpětně začne ovlivňovat primární proud. Tím by ale došlo k porušení rovnovážného stavu v primáru daného vztahem $u_1 + EMN_1 = 0$. K obnovení rovnovážného stavu dojde, když kromě magnetizačního proudu I_m v primáru, bude v primáru ještě protékat dodatečný proud I_1 , tzv. *zatěžovací*. Ten bude tak velký, že mg. tok Φ_1 jím vyvolaný, právě vykompenzuje mg. tok Φ_2 proudu I_2 .

Platí $\Phi_1 = N_1 \cdot \frac{I_1}{R_m}$ a $\Phi_2 = N_2 \cdot \frac{I_2}{R_m}$. Pro stav vykompenzování platí $\Phi_1 + \Phi_2 = 0$. Po dosazení dostaneme pro ef. hodnoty $N_1 \cdot I_1 = N_2 \cdot I_2$, nebo $\frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$.

Vztah představuje základní transformační rovnici pro bezetrátový transformátor s těsnou vazbou.

PE2.7.2 Praktický výpočet transformátoru

Reálný transformátor je vždy ztrátový. Předpokládejme, že transformátor je připojen na střídavý signál.

Induktivní odpor (induktance) je $X_L = \omega L$, kde úhlový kmitočet $\omega = 2\pi \cdot f$. Napětí na indukčnosti je $U_L = X_L \cdot I$.

Vlastní indukčnost o N závitů a mg. indukčnímu toku Φ je $N \cdot \Phi = L \cdot I$. Po dosazení do vztahu pro napětí na indukčnosti dostaneme $U_L = \omega \cdot L \cdot I = \omega \cdot N \cdot \Phi$. Dosazením za $\Phi = B \cdot S$, a $U_{\max} = \sqrt{2} \cdot U_{ef}$ dostaneme

$$\sqrt{2} \cdot U_{ef} = 2\pi \cdot f \cdot N \cdot B \cdot S, \text{ z čehož pak ef. napětí}$$

$$U_{ef} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot f \cdot N \cdot B \cdot S = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot B \cdot S.$$

Pro $U_{ef} = 1 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $B = 1 \text{ T}$ dostaneme počet závitů na 1 V primáru $\frac{N}{1 \text{ V}} = \frac{1}{4,44 \cdot 50 \cdot 1} \cdot \frac{1}{S} = \frac{0,45}{S} \left[\frac{1}{\text{m}^2} \right]$, nebo

$$\frac{N}{1 \text{ V}} = \frac{45}{S} \left[\frac{1}{\text{cm}^2} \right]. \text{ Pro sekundár volíme hodnotu vyšší podle hodnoty účinnosti.}$$

Tabulka energetické účinnosti transformátorů (z technické praxe)

Výkon (VA)	Účinnost (%)
10	60–70
25	70–80
50	80–85
100	85–90
1000	>90

Poznámka

Při měření indukčnosti primáru nebo sekundáru, můžeme být překvapeni různými hodnotami naměřenými měřicí indukčnosti.

Jednoznačně je určena hodnota vlastní indukčnosti u lineárního induktoru, tj. bez feromagnetického jádra. Tehdy všechny typy vlastních indukčností (statická, dynamická, diferenciální, energetická) jsou shodné s hodnotou statické indukčnosti.

Při měření vlastní indukčnosti nelineárního induktoru (vratná-reverzibilní) jsou naměřené hodnoty závislé na pracovním bodu, tj. na velikosti protékajícího proudu. Pro měření nelineárního induktoru je potřeba volit měřicí metodu, která používá co nejmenší hodnotu ΔI . Vhodné jsou proto měřiče používající můstkové metody. Ty pracují v okolí počátku $\Phi(I)$ charakteristiky. Všechny definice vlastních indukčností mají jednotku henry – H.

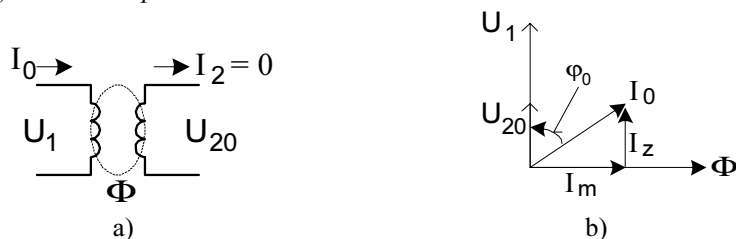
PE2.7.3 Vektorové diagramy transformátoru

Uvažujeme transformátor ztrátový, kdy ztráty mohou být

- ztráty hystereze v mg. jádře,

- ztráty vířivými proudy v mg. jádře,
- ztráty v reálném odporu vinutí,
- ztráty dielektrické v dielektriku izolace vinutí.

Vektorový diagram transformátoru naprázdno



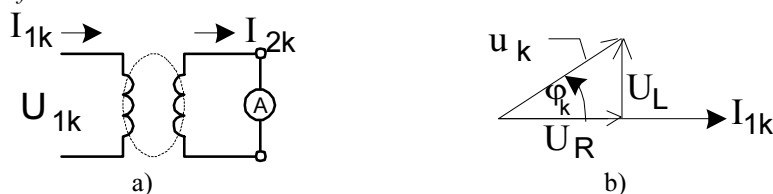
Obr. PE2.7.3.1 Transformátor naprázdno a jeho vektorový diagram

V technické praxi bývá $I_0 = (1,5 \div 15)\% I_{jm}$ a fázový úhel $\varphi_0 \rightarrow 90^\circ$. Účinník naprázdno je $\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{U_1 \cdot I_0}$, kde I_m je

magnetizační (jalový) proud pro přemagnetizování mg. jádra (jha), I_z je proud ztrátový, P_0 jsou ztráty naprázdno naměřené wattmetrem, součin $(U_1 \cdot I_0)$ je výkon zjištěný voltmetrem a ampérmetrem.

Ze zdroje vst. napětí U_1 odebírá transformátor magnetizační proud I_m , který vytváří mg. indukční tok Φ . Na krytí ztrát hysterezních a vířivými proudy (ztráty ve vinutí zanedbáme) odebírá transformátor činný (ztrátový) proud I_z . Proud I_m , I_z se vektorově sčítají na proud I_0 (vst. proud naprázdno).

Vektorový diagram transformátoru nakrátko



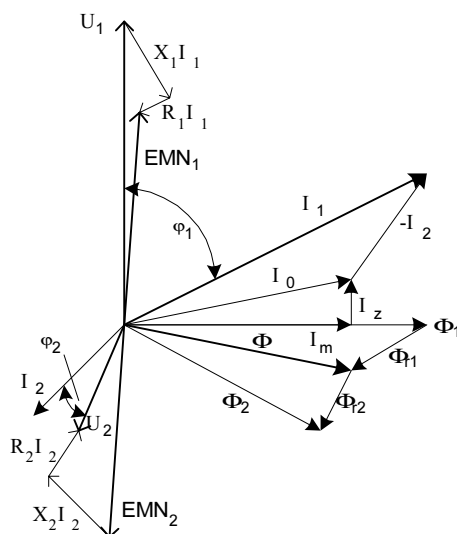
Obr. PE2.7.3.2 Transformátor nakrátko a jeho vektorový diagram

Platí $u_k = \frac{U_{1k}}{U_{1jm}} \cdot 100\%$, účinník nakrátko je $\cos \varphi_k = \frac{P_k}{U_{1k} \cdot I_{1k}}$, kde P_k jsou ztráty změřené wattmetrem (příkon ve W),

součin $(U_{1k} \cdot I_{1k})$ je výkon (příkon ve VA) zjištěný voltmetrem a ampérmetrem.

PE2.7.4 Vektorový diagram zatíženého ztrátového transformátoru

Uvažujme, že na vstup transformátoru je připojen zdroj střídavého napětí U_1 .



Obr. PE2.7.4.1 Vektorový diagram zatíženého ztrátového transformátoru

Od napětí U_1 jsou vektorově odečteny reaktanční úbytek napětí $(X_1 \cdot I_1)$ (kolmo k I_1) a úbytek na reálném odporu $(R_1 \cdot I_1)$ (ve fázi s I_1). Po odečtení získáme elektromotorické napětí EMN_1 .

V sekundárním vinutí se indukuje EMN_2 , stejně velká, ale opačného směru s EMN_1 . Od EMN_2 se odečte reaktanční úbytek $(X_2 \cdot I_2)$ (kolmo k I_2) a úbytek na reálném odporu $(R_2 \cdot I_2)$ (ve fázi s I_2). Výsledkem je výst. sekundární napětí U_2 .

Magnetizační proud primárního vinutí I_m vytváří mg. indukční tok Φ_l (kolmo k U_{1l}). Vektorově se připočítá proud činný ztrátový I_z . Dostaneme tak vst. proud naprázdno I_0 . K proudu naprázdno se připočte záporně vzatý výst. proud $-I_2$. Vektorovým součtem dostaneme vst. proud I_1 . Od vst. mg. toku Φ_l se odečítá vst. rozptylový tok Φ_{r1} (ve fázi s I_1). Dostaneme tak společný mg. tok Φ (kolmo k EMN_1 a EMN_2). K němu se přičítá výst. rozptylový tok Φ_{r2} (ve fázi s I_2). Výsledkem je mg. tok sekundárního vinutí Φ_2 (kolmo k U_2).

Fázový posuv $\varphi_1 > \varphi_2$, což je důsledkem rozptylových mg. toků.

Poznámka

Zjednodušený tzv. Kappův vektorový diagram zavádí sloučení primárních a převedených sekundárních odporů a reaktancí (nebude uváděn).

PE2.7.5 Ztráty v transformátoru

Každý (technický) transformátor je ve skutečnosti je ztrátový. U transformátorů pracujících na průmyslovém kmitočtu $f = 50$ Hz jsou určující dva základní typy ztrát

- 1) *Ztráty hystereze* – (též v železe) jsou dány střídavou magnetizací feromagnetického jádra, způsobené vst. zdrojem střídavého signálu daného kmitočtu. Jsou úměrné ploše hysterezní smyčky S_H , mg. indukci B_m a hmotnosti mg. jádra m_z . Lze psát $P_z \approx k \cdot S_H \cdot B_m \cdot m_z$

Protože mg. indukční tok Φ nezávisí na přenášeném výkonu, nejsou hysterezní ztráty závislé na zatížení.

- 2) *Ztráty v odporu vinutí* – (též v mědi) vznikají průchodem proudu v primárním a sekundárním vinutí. Protože platí $P = R \cdot I^2$ jsou závislé na druhé mocnině protékajícího proudu vinutími. Po dosazení

$$P_{Cu} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2. \text{ Platí-li } I_2 = \frac{I_1}{p}, \text{ kde } p \text{ je převod transformátoru a přepočtený odpor sek. vinutí do}$$

$$\text{primáru } R_2' = \frac{R_2}{p^2} \text{ dostaneme po dosazení } P_{Cu} = (R_1 + R_2') \cdot I_1^2.$$

Poznámka

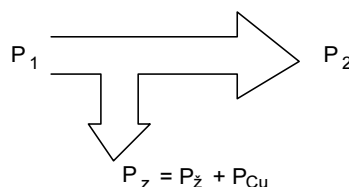
Ztráty vířivými proudy v mg. jádře jsou zmenšeny rozdělením plochy jádra na vzájemně izolované plechy s malým příčným průřezem. Čím tenčí plechy, tím menší ztráty. Ztráty dielektrické se při průmyslovém kmitočtu $f = 50$ Hz neuplatňují, ale až při vf.

PE2.7.6 Účinnost ztrátového transformátoru

Účinnost je bezrozměrné číslo, které udává využitelnost dodané energie (výkonu).

Pro činné ztráty v transformátoru lze psát $P_z = P_z + P_{Cu}$. Dále platí pro příkon $P_1 = P_z + P_2$, z čehož využitelná účinnost

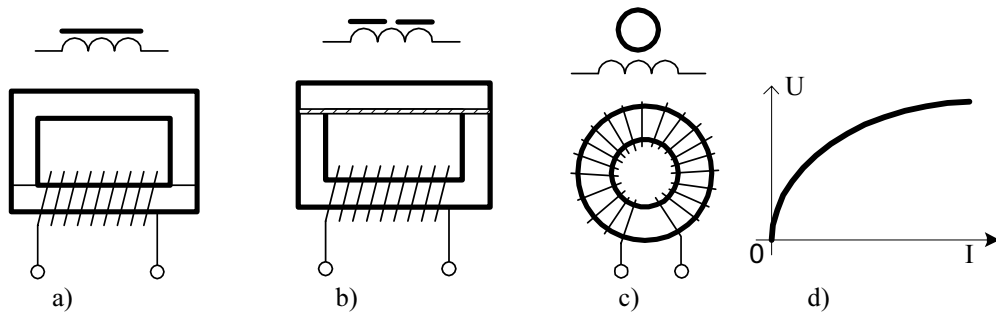
$$\text{ztrátového transformátoru je } \eta_v = \frac{P_2}{P_1}.$$



Obr. PE2.7.6.1 K rozdělení výkonů v transformátoru

PE2.7.7 Tlumivka

Má vinutí s mg. jádrem z důvodu zvýšení indukčnosti. Mg. jádro může být uzavřeno nebo otevřeno s mezerou proti přesycení ss proudem.



Obr. PE2.7.7.1 Tlumivka s jádrem uzavřeným, s mezerou, toroidní a její impedanční charakteristika

PE2.7.8 Reaktor

Je to vinutí bez mg. jádra. Používá se k omezení zkratových proudů nebo k oddělení vf signálů od sítě. Vinutí musí odolávat přepětím a elektrodynamickým silám při zkratových proudech.