

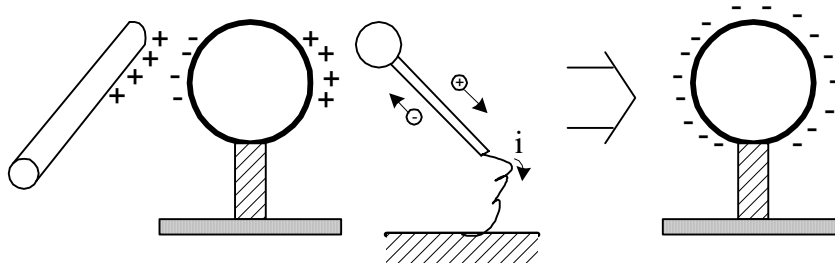
Obsah

PE1.1 ELEKTRICKÝ NÁBOJ A JEHO DĚLENÍ	2
PE1.2 GENERACE NÁBOJŮ ELEKTROSTATICOU INDUKCÍ (INFLUENCÍ).....	3
PE1.3 DIELEKTRIKA A IZOLANTY.....	5
PE1.4 DIELEKTRICKÁ ABSORPCE	6
PE1.5 NABÍJENÍ A VYBÍJENÍ KAPACITORU.....	7
PE1.6 STŘEDNÍ VÝKON NABITÉHO KAPACITORU	14
PE1.7 NABÍJENÍ A VYBÍJENÍ INDUKTORU	15
PE1.8 NABÍJENÍ A VYBÍJENÍ RLC OBVODU.....	24
PE1.9 VÝZNAM ELEKTRICKÉ IZOLACE	28
PE1.10 JOULEHO ZTRÁTY NA REZISTORU	30

PE1.1 Elektrický náboj a jeho dělení [12]

Je známou skutečností, že každá látka je složena z atomů, které mají el. nabitě jádro. Kolem jádra obíhají záporně nabitě částice – elektrony. (Joseph John Thomson 1856–1940, objevitel elektronu). V neionizovaném stavu je el. náboj jádra atomu roven součtu el. nábojů obíhajících elektronů. V dostatečné vzdálenosti od atomu se proto jeví jako el. neutrální.

U vodičů jsou elektrony na vnějších drahách již slabě vázány ke „svému“ jádru, takže již při teplotě okolí se stávají „volnými“ a mohou se pohybovat v celém objemu vodiče. Mluví se o tzv. elektronovém plynu.

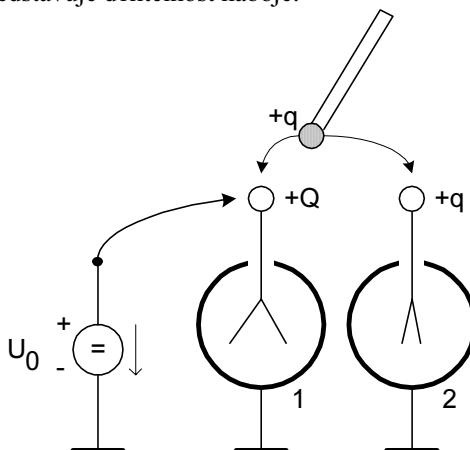


Obr. PE1.1.1 Oddělení el. nábojů vlivem elektrostatické indukce

Kladně nabitou skleněnou tyčku přiblížíme k nenabitě vodivé kouli. Vlivem elektrostatické indukce, tj. vlivem silového působení el. pole v okolí nabitě skleněné tyčky se na povrchu vodivé koule přitáhnou volné elektrony. Na odvrácené straně jich bude nedostatek, což se projeví jako kladný náboj. Odvedením kladného náboje vodivým spojením do země (nulový el. potenciál) zbude na povrchu celé koule pouze náboj záporný.

Fyzikálně správněji mělo by se říci, že ze země se přivede na povrch vodivé koule záporný náboj (elektrony). To je důvodem, proč je povrch koule záporně nabitý.

Uvažujme následující případ, který představuje dělitelnost náboje.



Obr. PE1.1.2 Dělení náboje a jeho transport izolovaným vodičem

Nejdříve připojením zdroje nabijeme elektroskop 1 kladným nábojem $+Q$. Polepy elektroskopu se vlivem elektrostatických sil rozestoupí. Náboj akumulovaný na elektroskopu bude $Q = C_E \cdot U_0$, kde C_E je kapacita elektroskopu, U_0 je napětí zdroje.

Poté se dotkneme elektroskopu 1 nenabitou tyčkou s vodivou koulí o kapacitě C_t . Z elektroskopu tím odebereme náboj $+q = C_t \cdot U_0$. Náboj na elektroskopu se zmenší na $(Q - q)$, což se projeví přiblížením polepů elektroskopu.

Dotykem tyčky se elektroskopu 2 předá náboj $+q$ (téměř všechno). Napětí na elektroskopu 2 bude

$U = \frac{+q}{C_E} = \left(\frac{C_t}{C_E} \right) \cdot U_0$. Protože poměr $\left(\frac{C_t}{C_E} \right) < 1$, bude také $U < U_0$. To se projeví nepatrným rozestoupením polepů elektroskopu 2.

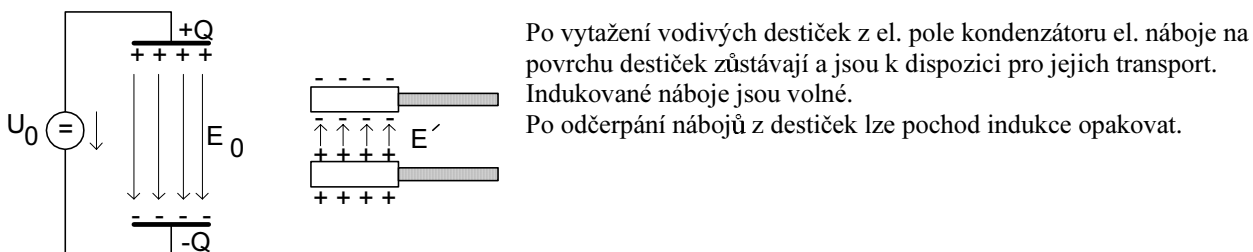
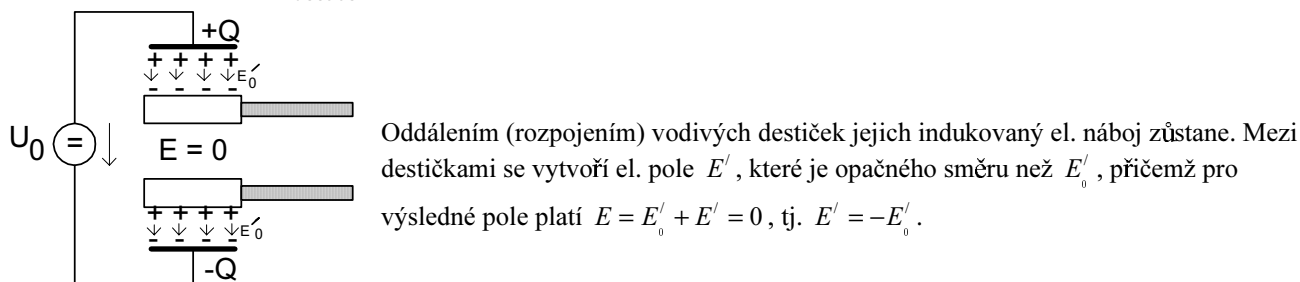
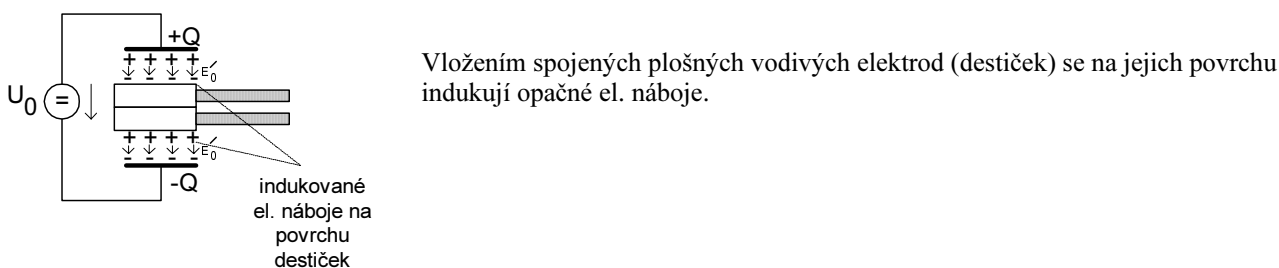
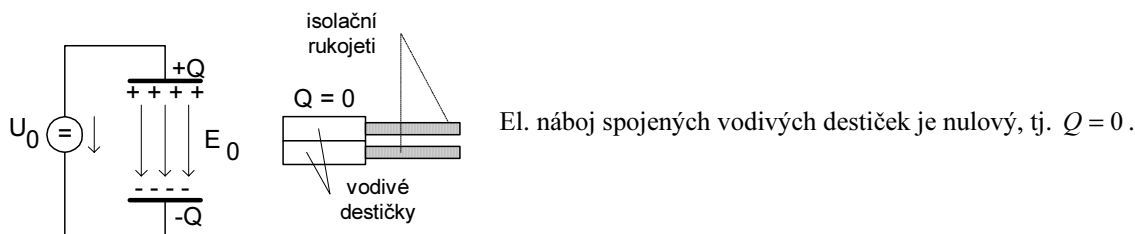
Poznámka

El. náboj je fyzikální veličina vyjadřující přebytek nebo nedostatek elektronů v tělese. Symbol náboje Q (Quantity of Charge).

Nejmenší el. množství (náboj) změřil Robert Andrews Millikan (1868–1963), americký experimentální fyzik, jako náboj elektronu ($-e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

PE1.2 Generace nábojů elektrostatickou indukcí (influencí) [12]

Uvažujme deskový kondenzátor připojený ke zdroji napětí U_0 . Mezi jeho deskami se vytvoří (indukuje) el. pole o intenzitě E_0 podle následujících obrázků:



Poznámka

Mechanická práce potřebná k zasunutí a vysunutí destiček se děje kolmo k vektoru el. intenzity E_0 , je tedy nulová.

PE1.2.1 El. práce při indukci náboje

Předchozí obrázky představují kapacitor, který je trvale připojen ke zdroji napětí U_0 . Necht' je vzdálenost mezi deskami d_0 a plocha desek rovna S . Hodnota el. intenzity mezi deskami bude rovna $E_0 = \frac{U_0}{d_0}$, akumulovaný el. náboj roven

$Q_0 = \epsilon_0 \cdot E_0 \cdot S$. Po vložení vnitřní vodivé elektrody o tloušťce d_1 se prostor mezi deskami zmenší na hodnotu $(d_0 - d_1)$ a hodnota intenzity el. pole vzroste na hodnotu $E_0' = \frac{U_0}{d_0 - d_1}$, zvětšený el. náboj bude roven

$Q_0' = \epsilon_0 \cdot E_0' \cdot S$. Ten musí dodat vnější zdroj U_0 . Zdroj napětí U_0 tedy musí vykonat el. práci

$$A = U_0 \cdot \Delta Q = U_0 \cdot (Q_0' - Q_0) = \epsilon_0 \cdot S \cdot \left(\frac{1}{d_0 - d_1} - \frac{1}{d_0} \right) \cdot U_0^2.$$

Poznámka

Aby hodnota el. práce byla zanedbatelná $A \rightarrow 0$, muselo by platit $(d_1 \ll d_0)$, což není nerealizovatelné.

PE1.2.2 Realizace ss transformátoru

Označme pro jednoduchost vzdálenost elektrod i po jejich oddálení d_1 . Intenzita el. pole mezi elektrodami bude po vysunutí rovna $E' = -E'_0$. Akumulovaný el. náboj je roven Q'_0 .

Napětí mezi deskami bude
$$U = E'_0 \cdot d_1 = -\frac{d_1}{d_0 - d_1} \cdot U_0.$$

Za předpokladu, že bude platit $(d_1 \ll d_0)$, bude $U \approx \left(\frac{d_1}{d_0}\right) \cdot U_0$.

Příklad

Uvažujme $U_0 = 10 \text{ kV} = 10^4 \text{ V}$, $d_0 = 20 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, $d_1 = 0,2 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

Napětí mezi elektrodami po vysunutí bude rovno

$$U = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-1}} \cdot 10^4 = 10 \text{ V (pro vzduch)}.$$

Poznámka

Výstupní napětí je vyhodnocováno elektrometrickým (bezodběrovým) způsobem.

PE1.3 Dielektrika a izolanty (<http://cs.wikipedia.org/wiki/Dielektrikum>)

Často se zaměňují pojmy izolant a dielektrikum.

Dielektrikum je izolant, který má schopnost polarizace, kdežto *izolant* samotný tuto možnost nemá. Tedy všechna dielektrika jsou izolanty, ale ne všechny izolanty jsou dielektrikem.

Polarizace dielektrika

Vložení dielektrika do elektrického pole nastává jev, který se nazývá polarizace dielektrika. Při polarizaci se z atomů nebo molekul dielektrika (nepolární dielektrikum) působením přitažlivé a odpuzivé elektrické síly stanou elektrické dipóly – dojde k nesymetrickému rozložení částic s elektrickým nábojem uvnitř atomů nebo molekul (blíže k jedné straně elektrony, blíže ke druhé straně jádro atomu). Taková polarizace se nazývá atomová polarizace. Některé látky (polární dielektrika, např. voda) obsahují elektrické dipóly i bez působení vnějšího elektrického pole. Jejich směr je ale chaotický a při polarizaci dojde pouze k uspořádání dipólů do jednoho směru. Taková polarizace se nazývá orientační polarizace. Všechny elektrické dipóly mají při polarizaci stejnou polaritu opačnou k polaritě vnějšího elektrického pole. Tím se velikost vnějšího elektrického pole zmenšuje. Poměr intenzity E_0 vnějšího elektrického pole k intenzitě výsledného elektrického pole E uvnitř dielektrika udává relativní permitivitu dielektrika ϵ_r :

Příčina vodivosti dielektrika

Elektrony se pohybují a naráží na neutrální částice (nárazová ionizace), které ionizují. Při velkém počtu částic je částic tolik, že dielektrikum přestává izolovat a dochází k elektrickému průrazu.

Průraz dielektrikem

Působením silného elektrického pole může dojít k průrazu dielektrika, tzn. uvnitř dielektrika se vytvoří vodivé spojení, kterým může procházet elektrický proud. Po dráze elektrického proudu se díky velké elektrické síle vytrhují elektrony z atomů nebo molekul. Může dojít k trvalému nebo k dočasnému poškození dielektrika.

Velikost maximálního elektrického pole, při němž ještě nedojde k průrazu, se nazývá dielektrická pevnost E_k a závisí na velikosti ionizační práce, potřebné k ionizaci (uvolnění elektronu z atomu). Možnost průrazu též charakterizuje průrazné napětí, které udává nejmenší velikost napětí, které způsobí průraz při dané tloušťce dielektrika.

Poznámka

E_k je kritická hodnota intenzity el. pole, při níž ještě nedochází k el. průrazu. Je udávána v tabulkách.

Elektrický izolant

Elektrický izolant je látka, která nevede elektrický proud. Elektrický izolant neobsahuje volné částice s elektrickým nábojem, nebo je obsahuje v zanedbatelném množství. Zamezuje průtoku elektrického proudu mezi vodiči, které mají rozdílný elektrický potenciál.

Dobrymi izolanty jsou porcelán, sklo, většina plastů, dřevo, papír, za normálních podmínek i vzduch nebo jiné plyny. Nejlepším izolantem je vakuum.

PE1.4 Dielektrická absorpce

Již na samotném počátku výroby kondenzátorů byl pozorován zajímavý jev. Jestliže nabitý kondenzátor byl zcela vybit zkratem a zkrat odstraněn, pak po určité době se na svorkách kondenzátoru objevilo opět napětí. Podobný jev byl též pozorován např. u dlouhých izolovaných kabelů.

Vynálezce vf vakuové diody J. A. Fleming srovnával tuto vlastnost dielektrika s nedokonalou pružností zatížených mechanických vláken. Jestliže vodorovné, na koncích upevněné vlákno, uprostřed mechanicky zatížíme, bude vzniklá výchylka (průhyb) závislá nejen na velikosti zatížení, ale i na době působení. Po krátkodobém zatížení se vlákno ihned vrátí do původní polohy, jestliže však je vlákno zatíženo dlouhodobě, výchylka se bude nepatrně zvětšovat a po odstranění zátěže se vlákno nevrátí ihned do původní polohy, ale velmi pomalu „dopružuje“.

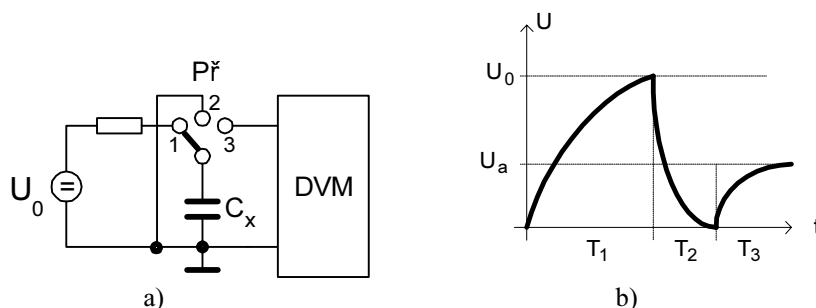
Analogické jsou poměry u elektricky nabitého a opět vybitého kondenzátoru. Velikost náboje, který se po zkratu objeví na svorkách kondenzátoru, závisí nejenom na velikosti nabíjecího napětí, nýbrž i na době nabíjení před zkratem.

Protože se náboj zkratem z kondenzátoru zcela neodvedl a chová se, jako by byl dielektrikem absorbován, jev byl nazván „dielektrickou absorpcí“.

Podstatou dielektrické absorpce je polarizace dielektrika. Tento jev poprvé již popsal M. Faraday (1837), který do elektrotechniky zavedl též označení „dielektrikum“. V současné době je známo více druhů polarizací. Vedle *elektronové* (atomové) polarizace, které se vyznačují velmi krátkými časovými konstantami, nejdůležitější roli u kondenzátorů hraje tzv. *orientační polarizace*, což představuje polarizaci molekulárních dipólů a polarizace prostorového náboje, tzv. *interfaciální polarizace*.

Polarizace molekulárních dipólů, přesněji permanentních molekulárních dipólů, se vyznačuje dlouhými časovými konstantami a je hlavní příčinou dielektrické absorpce.

Měření dielektrické absorpce ukazuje následující obr.



Obr. PE1.4.1 K měření dielektrické absorpce

Měření dielektrické absorpce

Přepínač v poloze 1

Kondenzátor je nabíjen po dobu T_1 , až napětí se zvětší na hodnotu zdroje U_0 , takže jeho dielektrikum je polarizováno.

Přepínač v poloze 2

Přepnutím do polohy 2 je kondenzátor zcela vybit. Vybíjení trvá po dobu T_2 .

Přepínač v poloze 3

V této poloze je zkrat zrušen a je sledován zbytkový náboj, který se uvolní následkem dipólové a interfaciální polarizace dielektrika. Měření dielektrické absorpce vytváří na kondenzátoru napětí, které se za dobu T_3 ustálí. Toto absorpční napětí U_a představuje urč. část původního nabíjecího napětí U_0 , které je závislé na teplotě, době nabíjení, vybíjení a vlastnostech dielektrika.

Pro měření absorpčního napětí je potřeba volit digitální voltmetr (DVM) s velmi vysokým vstupním odporem. Pro srovnání dielektrické absorpce různých typů kondenzátorů je potřeba volit u všech měřených kondenzátorů shodné časy T_1 , T_2 . Dobu T_3 volíme takovou, aby nastalo ustálení.

Poznámka

Jev dielektrické absorpce je velmi důležitý při VN. Jeho zanedbání může vést až k úrazu el. napětím. Nejvýhodnější přístup je:

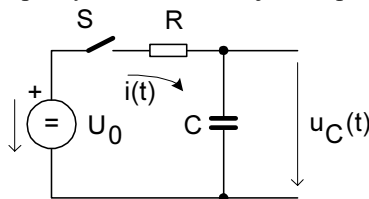
Kondenzátory bez zjevného připojení ke zdroji VN vždy ZKRATOVAT!

PE1.5 Nabíjení a vybíjení kapacitoru [6], [12]

Kapacitor je obvodový prvek, který je definován jako zásobník (akumulátor) energie el. pole. Realizován je formou různého uspořádání dvojice vodivých, vzájemně izolovaných elektrod. Schopnost akumulace el. energie se hodnotí parametrem nazvaným *kapacitou*.

PE1.5.1 Nabíjení kapacitoru přes rezistor

Jde v podstatě o přechodový jev nabíjení kapacity z reálného zdroje ss napětí. Zapojení odpovídá následujícímu obr.



Obr. PE1.5.1.1 RC obvod

Z 2. Kirchhoffova zákona platí $-U_0 + u_R + u_C = 0$, přičemž je $u_R = R \cdot i$, proud kapacitou je $i = C \frac{du}{dt}$, z čehož pak

$du = \frac{1}{C} i \cdot dt$ a po integraci $u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$. Po dosazení dostaneme $U_0 = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt$. Rovnici derivujeme

$R \cdot C \cdot \frac{di}{dt} + i = 0$. Po úpravě pak $\frac{di}{i} + \frac{dt}{RC} = 0$. Dále upravíme na tvar $\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} \cdot dt$. Rovnici integrujeme. Řešení je

tvaru $\ln i = -\frac{1}{RC} \cdot t + \ln K$. Provedeme odlogaritmování a dostaneme vztah

$$i(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Získali jsme obecné řešení časového průběhu proudu v obvodu při nabíjení. Zbývá ještě stanovit hodnotu parametru K . Vyjdeme z následujících předpokladů. Pro $t = 0 \rightarrow u_C = 0$, pro

$t = \infty \rightarrow u_C = U_0$. Tyto podmínky dosadíme pro napětí na kapacitě

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = \frac{K}{C} \int_0^t e^{-\frac{t}{RC}} \cdot dt = -R \cdot K \cdot \left[e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^t = R \cdot K \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right].$$

Použijeme podmínky pro $t = 0 \rightarrow u_C = 0$,

$t = \infty \rightarrow u_C = R \cdot K$. Platí též, že pro $t = \infty \rightarrow u_C = U_0$, z čehož je $K = \frac{U_0}{R}$. Dosadíme do vztahu pro časový průběh

$$\text{napětí na kapacitě } u_C(t) = \frac{R \cdot U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ kde } \tau = RC \text{ je el. časová konstanta RC obvodu, } U_0 \text{ je}$$

napětí zdroje, též $U_0 = U_C(\infty)$, napětí na kapacitoru po ustálení. Dosazením za konstantu K dostaneme známý vztah pro

časovou závislost proudu ve tvaru $i(t) = I_m \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$.

Časový průběh napětí na R

Vyjdeme ze vztahu pro napětí na rezistoru

$$u_R = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Časový průběh el. náboje na C

Vyjdeme ze vztahu pro el. náboj

$$q(t) = C \cdot u_C(t) = C \cdot U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = Q_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

kde Q_∞ je náboj po ustálení napětí na kapacitoru.

Energie dodaná při nabíjení zdrojem

Vyjdeme z definičního vztahu pro energii

$$W = \int_0^\infty p \cdot dt = \int_0^\infty U_0 \cdot i \cdot dt = U_0 \cdot I_m \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \frac{U_0^2}{R} \cdot (-\tau) \cdot [0 - 1] = C \cdot U_0^2.$$

K témuž závěru lze dojít jednodušeji např.

$$W = \int_0^{\infty} p \cdot dt = \int_0^{\infty} U_0 \cdot i \cdot dt = U_0 \int_0^{\infty} dQ = U_0 \cdot Q_{\infty} = C \cdot U_0^2$$

Energie akumulovaná v nabitém kapacitoru

$$\begin{aligned} W_C &= \int_0^{\infty} u_C \cdot i \cdot dt = \int_0^{\infty} U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot I_m \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-2\frac{t}{\tau}}\right) \cdot dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt - \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \\ &= C \cdot U_0^2 - \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2. \end{aligned}$$

K témuž závěru lze též dojít např. pomocí vztahu

$$W_C = \int_0^{\infty} u \cdot dQ = C \int_0^{U_0} u \cdot du = C \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{U_0} = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2.$$

Energie akumulovaná v nabitém kapacitoru je rovna polovině energie dodané zdrojem W .

Energie ztracená v rezistoru

$$W_R = R \int_0^{\infty} i^2 \cdot dt = R \cdot \left(\frac{U_0}{R} \right)^2 \int_0^{\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \frac{U_0^2}{R} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2.$$

Poznámka

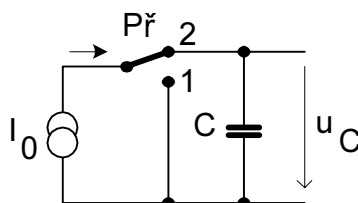
Při nabíjení kapacitoru z reálného zdroje je $\left(\frac{1}{2}\right)$ energie ze zdroje nevratně ztracená v rezistoru (Jouleho teplo) a $\left(\frac{1}{2}\right)$

energie je akumulovaná v el. poli kapacitoru.

Kapacitor C se tedy přes rezistor nabíjí s 50% energetickou účinností.

Snahou bylo nalézt způsob přenosu energie ze zdroje do el. pole kapacitoru s větší účinností. Jednou z možností je nabíjení ze zdroje proudu, jak ukazuje následující obr.

PE1.5.2 Nabíjení kapacitoru ze zdroje proudu



Obr. PE1.5.2.1 Nabíjení zdrojem proudu

Uvažujme, že pro $t = 0 \rightarrow u_C = 0$. Za čas dt bude akumulovaný el. náboj roven $dQ = I_0 \cdot dt$. Za čas T bude

akumulovaný náboj roven $Q = I_0 \int_0^T dt = I_0 \cdot T$. Platí, že $Q = I_0 \cdot T = C \cdot u_C$.

Akumulovaná energie v el. poli kapacitoru za dobu T bude

$$W_C = \int_0^T u_C \cdot I_0 \cdot dt = \left| u_C = \frac{I_0}{C} \cdot T \right| = \frac{I_0^2}{C} \cdot T \int_0^T dt = \frac{1}{C} (I_0 \cdot T)^2 = \frac{Q^2}{C} = C \cdot u_C^2(T).$$

Energie dodaná proudovým zdrojem I_0 za dobu T bude

$$W = \int_0^T u_C \cdot I_0 \cdot dt = \left| u_C = \frac{I_0}{C} \cdot T \right| = \frac{I_0^2}{C} \cdot T \int_0^T dt = \frac{1}{C} (I_0 \cdot T)^2 = \frac{Q^2}{C} = C \cdot u_C^2(T).$$

Energetická účinnost nabití je

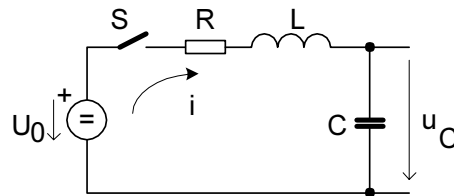
$$\eta = \frac{W_C}{W} = 1.$$

Poznámka

Při nabíjení kapacitoru z proudového zdroje se nabíjení děje se 100% energetickou účinností. Dokonalé nabíjení z proudového zdroje je zajímavé pouze na první pohled. Uvědomíme-li si, že proudový zdroj se v techn. praxi realizuje jako napěťový zdroj s velkým vnitřním odporem, dostaneme se s účinností zpět na 50%.

PE1.5.3 Nabíjení kapacitoru induktorem

Uvažujme zapojení podle následujícího obr.



Obr. PE1.5.3.1 Nabíjení kapacitoru přes reálný induktor

Energie dodaná ze zdroje bude

$$W = \int_0^{\infty} p \cdot dt = \int_0^{\infty} U_0 \cdot i \cdot dt = U_0 \int_0^{\infty} dQ = U_0 \cdot Q_{\infty} = C \cdot U_0^2.$$

Při rozboru vyjdeme z 2. Kirchhoffova zákona, kdy pro obvod lze psát $-U_0 + u_R + u_L + u_C = 0$. Po dosazení dostaneme

$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = U_0$. Získali jsme nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Rovnici

zderivujeme a získáme tvar $L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = 0$. Její charakteristická rovnice je tvaru $L \cdot \alpha^2 + R \cdot \alpha + \frac{1}{C} = 0$.

Poznámka

Charakterickou rovnici řešíme formálně shodně jako algebraickou rovnici druhého řádu tvaru $a x^2 + b x + c = 0$, která má

kořeny ve tvaru $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

V našem případě tedy dostaneme $\alpha_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2L} = -\left(\frac{R}{2L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{LC}\right)}$. Nás zajímá případ, kdy RLC

obvod kmitá, tj. má komplexní kořeny tvaru $\alpha_{1,2} = -a \pm j b$. Ty nastanou v případě, že rozdíl pod odmocninou

(diskriminant) je menší než nula. Musí tedy platit $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \leq \frac{1}{LC}$, z čehož je po úpravě dostaneme podmínku kmitání

$R \leq 2 \frac{L}{C}$. Za tohoto předpokladu lze psát $\alpha_{1,2} = -\left(\frac{R}{2L}\right) \pm j \sqrt{\left(\frac{1}{LC}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \delta \pm j \omega_0^2 - \delta^2 = \delta \pm j \omega$, kde tlumení je

$\delta = \left(\frac{R}{2L}\right)$, vlastní úhlový kmitočet RLC obvodu $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, rezonanční kmitočet ideálního LC obvodu pak

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Poznámka

Pro označení vlastního úhlového kmitočet se užívá v literatuře označení ω_v (též vlastní), v našem případě použijeme ale označení ω , protože si ho nelze zaměnit s jiným.

Obecný integrál diferenciální rovnice je tvaru $i = e^{-\delta t} \cdot (K_1 \cdot \cos \omega t + K_2 \cdot \sin \omega t)$. Konstanty K_1, K_2 se stanoví z mezních (počátečních) podmínek. Pro $t = 0 \rightarrow i = 0$, tedy $K_1 = 0$. Po dosazení pak $i = K_2 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t$. Ze zapojení lze

vysledovat, že v čase $t = 0 \rightarrow u_L = U_0$. Platí, že $u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot K_2 \cdot (-\delta \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t + \omega \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos \omega t)$. Konstantu K_2

stanovíme z podmínky $t = 0 \rightarrow U_0 = L \cdot K_2 \cdot \omega$, z čehož pak $K_2 = \frac{U_0}{\omega \cdot L}$. Po dosazení pak dostaneme pro

Časový průběh proudu v RLC obvodu

$$i(t) = \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t.$$

Časový průběh napětí na induktoru

$$u_L(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t - \frac{\delta}{\omega} \cdot \sin \omega t \right).$$

Časový průběh napětí na rezistoru

$$u_R(t) = \frac{R}{\omega \cdot L} \cdot U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t.$$

Časový průběh napětí na kapacitoru – dostaneme využitím vztahu pro napětí na kapacitě

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = \frac{1}{C} \cdot \frac{U_0}{\omega \cdot L} \int_0^t e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t \cdot dt.$$

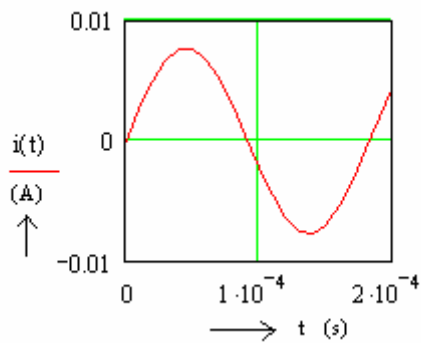
Stanovení integrálu z Tabulek integrálů

$$I = \int_0^t e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t \cdot dt = \left| \int e^{ax} \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) \right| = \frac{e^{-\delta t}}{\delta^2 + \omega^2} (-\delta \cdot \sin \omega t - \omega \cos \omega t).$$

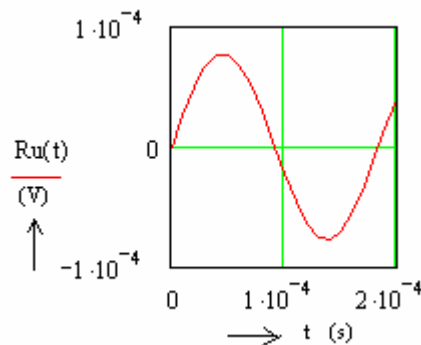
$$\text{Dále dosadíme za } \delta^2 + \omega^2 = \delta^2 + (\omega_0^2 - \delta^2) = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Po dosazení

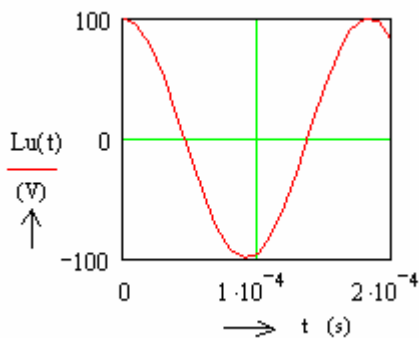
$$\begin{aligned} u_C &= \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = \frac{1}{C} \cdot \frac{U_0}{\omega \cdot L} \int_0^t e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t \cdot dt = \frac{1}{C} \cdot \frac{U_0}{\omega \cdot L} \left[\frac{e^{-\delta t}}{\delta^2 + \omega^2} (-\delta \cdot \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{C} \cdot \frac{U_0}{\omega \cdot L} \left[\frac{e^{-\delta t}}{\omega_0^2} \cdot (-\delta \cdot \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right]_0^t = \frac{U_0}{\omega} \cdot \left[e^{-\delta t} \cdot (-\delta \cdot \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right]_0^t = \\ &= \frac{U_0}{\omega} \cdot \left[e^{-\delta t} \cdot (-\delta \cdot \sin \omega t - \omega \cos \omega t) + \omega \right] = U_0 \cdot \left[1 - e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \cdot \sin \omega t \right) \right], \text{ z čehož je tedy} \\ u_C(t) &= U_0 \cdot \left[1 - e^{-\delta t} \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \cdot \sin \omega t \right) \right]. \end{aligned}$$



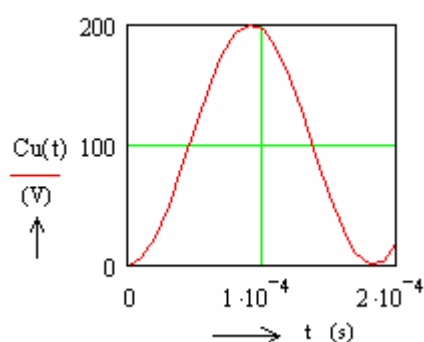
a) Časový průběh proudu



b) Časový průběh napětí na odporu



c) Časový průběh napětí na indukčnosti



d) Časový průběh napětí na kapacitě

Obr. PE1.5.3.1 Časové průběhy proudu, a napětí na R , L , C pro $R = 10^{-2}$, $L = 10^{-2}$, $C = 6 \cdot 10^{-11}$

Když si pozorně prohlédneme měřítka na ose y u jednotlivých grafů, je vidět, že největší rozkmit napětí vzniká na kapacitě. Z časového průběhu napětí na kapacitě je vidět, že maximum napětí na kapacitě nabývá dvojnásobku hodnoty

U_0 a to v čase poloviny periody, tj. $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$. Provedeme si početní kontrolu tohoto zjištění dosazením

$$u_C\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = U_0 \cdot \left[1 - e^{-\delta\left(\frac{\pi}{\omega}\right)} \cdot \left(\cos \omega\left(\frac{\pi}{\omega}\right) + \frac{\delta}{\omega} \cdot \sin \omega\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \right) \right] =$$

$$= U_0 \cdot \left[1 - e^{-\delta\left(\frac{\pi}{\omega}\right)} \cdot \left(\cos \pi + \frac{\delta}{\omega} \cdot \sin \pi \right) \right] = U_0 \cdot \left[1 - e^{-\delta\left(\frac{\pi}{\omega}\right)} \cdot (-1 + 0) \right] = U_0 \cdot \left[1 + e^{-\delta\left(\frac{\pi}{\omega}\right)} \right] \approx 2 \cdot U_0.$$

Energie akumulovaná v kapacitoru je $W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (u_{C_{\max}})^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (2 \cdot U_0)^2 = 2 \cdot C \cdot U_0^2$. Energie dodaná zdrojem je

$$W = \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \cdot i \cdot dt = U_0 \cdot \int_{Q(0)}^{Q\left(\frac{T}{2}\right)} dQ = U_0 \cdot Q\left(\frac{T}{2}\right) = C \cdot U_0 \cdot U_C\left(\frac{T}{2}\right) = C \cdot U_0 \cdot U_C\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = C \cdot U_0^2 \cdot (1 + e^{-\delta\frac{\pi}{\omega}}) \approx 2 \cdot C \cdot U_0^2.$$

Energetická účinnost nabíjení je tedy $\eta = \frac{W_C}{W} \approx 1$.

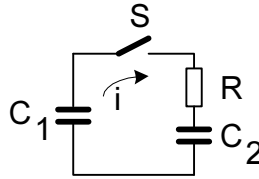
Poznámka

Jak ukazují časové průběhy, v čase $t = \frac{T}{2} \rightarrow i = 0$, tj. energie mg. pole akumulovaná v mg. poli induktoru se převedla (přetransformovala) do el. pole kapacitoru. Při nabíjení kapacitoru z ss zdroje přes induktor se dosahuje 100 % energetické účinnosti. Pro $u_C\left(\frac{T}{2}\right) \rightarrow i = 0$, tím Jouleho ztráty v obvodu jsou rovny nule.

Tohoto způsobu nabíjení lze též využít jako bezeztrátového zdvojnásobče napětí U_0 .

PE1.5.4 Nabíjení kapacitoru kapacitorem

Uvažujme zapojení podle obr.



Obr. PE1.5.4.1 Nabíjení reálné kapacity kapacitou

V obvodu není nezávislý zdroj, proto součet napětí u_C a u_R je roven nule, tj. platí $u_{C1} + u_R + u_{C2} = 0$. Po dosazení pak

$$\frac{1}{C_1} \int i \cdot dt + R \cdot i + \frac{1}{C_2} \int i \cdot dt = 0. \text{ Rovnici derivujeme } \frac{i}{C_1} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C_2} = 0. \text{ Provedeme oddělení (separaci) proměnných}$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{dt}{R \cdot C'}, \text{ kde } C' = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \text{ je výsledná hodnota kapacity sériového spojení. Integrací rovnice dostaneme}$$

$$\ln i = -\frac{t}{R \cdot C'} + \ln K. \text{ Po odlogaritmování je obecné řešení tvaru } i = K \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C'}}. \text{ Hodnotu konstanty } K \text{ stanovíme}$$

z mezních podmínek. Pro $t = 0 \rightarrow i = I_{\max} = \frac{U_{C1}}{R}$. Pro $t = \infty \rightarrow i = 0$, z čehož bude $K = I_m$. Po dosazení je časová závislost proudu v obvodu

$$i(t) = I_m \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C'}}.$$

El. náboj prošlý obvodem

Za čas dt projde obvodem náboj $dQ = i \cdot dt$. Za dobu $t = \infty$ projde obvodem celkový náboj

$$Q = \int_0^{\infty} i \cdot dt = I_m \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{R \cdot C'}} \cdot dt = \frac{U_{C1}}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{R \cdot C'}} \cdot dt = \frac{U_{C1}}{R} \cdot (-R \cdot C') \left[e^{-\frac{t}{R \cdot C'}} \right]_0^{\infty} = C' \cdot U_{C1}.$$

Náboj akumulovaný v C_1 je roven el. náboji akumulovanému na počátku nabíjení C_2

$$Q_1 = C_1 \cdot U_{C1}.$$

Časový průběh napětí na U_{C2}

$$u_{C2}(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i \cdot dt = \frac{I_m}{C_2} \int_0^t e^{-\frac{t}{R \cdot C'}} \cdot dt = \frac{U_{C1}}{R \cdot C_2} \cdot (-R \cdot C') \cdot \left[e^{-\frac{t}{R \cdot C'}} \right]_0^t = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot U_{C1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C'}} \right).$$

Podmínka rovnosti el. nábojů

Vyjdeme z mezních podmínek. Pro $t = 0 \rightarrow u_{C2} = 0$, pro $t = \infty \rightarrow U_{C2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot U_{C1}$. Po úpravě dostaneme

$U_{C2} \cdot (C_1 + C_2) = C_1 \cdot U_{C1}$, což říká, že platí $Q_2 = Q_1 = Q$ rovnost el. nábojů před a po nabití.

Akumulovaná el. energie na počátku nabíjení $W_1 = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_{C1}^2 = \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot U_{C1}$.

Akumulovaná el. energie na konci nabíjení

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot U_{C2} = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_{C1} \cdot \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) \cdot U_{C1} = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) \cdot W_{C1}.$$

Poznámka

Pro $C_1 = C_2 = C$ bude $W_2 = \frac{1}{2} \cdot W_1$. Otázkou je, kde se ztratila druhá polovina el. energie. Změnila se nevratně v Jouleho ztráty v rezistoru? Rovnost el. náboje vede na nerovnost el. energie?

Energie spotřebovaná v rezistoru – při nabíjení

$$W_R = \int_0^\infty R \cdot i^2 \cdot dt = R \cdot I_m^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{t}{RC'}} \cdot dt = R \cdot \left(\frac{U_{C1}}{R} \right)^2 \left[e^{-2\frac{t}{RC'}} \right]_0^\infty = \frac{U_{C1}^2}{R} \cdot \left(\frac{-R \cdot C'}{2} \right) \cdot (0 - 1) = \frac{1}{2} \cdot C' \cdot U_{C1}^2.$$

Kontrola zákona o zachování energie

$$W_1 = W_2 + W_R.$$

$$\frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_{C1}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{C_1^2}{C_1 + C_2} \right) \cdot U_{C1}^2 + \frac{1}{2} \cdot C' \cdot U_{C1}^2 = \frac{1}{2} \cdot U_{C1}^2 \cdot \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) \cdot (C_1 + C_2) = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_{C1}^2.$$

Poznámka

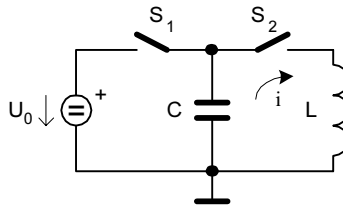
Druhá polovina energie byla při nabíjení nevratně ztracena v rezistoru. Zákon o zachování energie byl zachován.

Poznámka

James Prescott Joule (1818–1889) angl. fyzik, který objevil vztah mezi množstvím tepla a mechanickou prací.

PE1.5.5 Vybíjení kapacitoru induktorem

Uvažujme zapojení podle následujícího obr.



Obr. PE1.5.5.1 Vybíjení ideálního kapacitoru ideálním induktorem

Předpokládejme, že kapacitor C je nabitý na napětí $U_C = U_0$. Energie el. pole akumulovaná v el. poli kapacitoru je

$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$. V okamžiku připojení, tj. pro $t = 0 \rightarrow i = 0$. Napětí na induktoru je dáno indukčním zákonem

$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, proud kapacitorem vztahem $i_C = C \cdot \frac{di}{dt}$. Po spojení vznikne LC obvod. Není-li v obvodu nezávislý zdroj, lze

psát $i_L + i_C = 0$ nebo $u_L + u_C = 0$. Po dosazení např. dostaneme $L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i \cdot dt = 0$, z čehož po časové derivaci a úpravě

dostaneme výraz $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot i = 0$. Dostali jsme diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, která popisuje

časový průběh proudu v obvodu. Použijeme substituci $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, kde ω_0^2 je úhlový kmitočet LC obvodu.

Znáмым postupem zavedeme proměnnou $\alpha = \frac{di}{dt}$, $\alpha^2 = \frac{d^2 i}{dt^2}$ a dostaneme tzv. charakteristickou rovnici $\alpha^2 + \omega_0^2 = 0$,

která má dva imaginární kořeny $\alpha_{1,2} = \sqrt{-\omega_0^2} = \pm j\omega_0$. V učebnicích matematiky pro VŠ lze nalézt pro charakteristickou rovnici obecný integrál ve tvaru $i(t) = A_1 \cdot \cos \omega_0 t + A_2 \cdot \sin \omega_0 t$.

Konstanty A_1 , A_2 se stanoví z mezních (počátečních) podmínek.

Pro $t = 0 \rightarrow i = 0$, z čehož $A_1 = 0$. Bude tedy $i(t) = A_2 \cdot \sin \omega_0 t$. V čase $t = 0 \rightarrow u_L = u_C = U_0$. Pro napětí na induktoru platí $u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \omega_0 \cdot A_2 \cdot \cos \omega_0 t$. Po dosazení pro $t = 0$ bude $U_0 = \omega_0 \cdot L \cdot A_2$, z čehož je $A_2 = \frac{U_0}{\omega_0 L}$. Bude tedy časová závislost proudu v obvodu

$$i(t) = \frac{U_0}{\omega_0 L} \cdot \sin \omega_0 t = I_m \cdot \sin \omega_0 t.$$

Časovou závislost napětí na induktoru stanovíme pomocí vztahu

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \left(\frac{U_0}{\omega_0 L} \right) \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t = U_0 \cdot \cos \omega_0 t.$$

V obvodu vzniknou periodické kmity s amplitudou napětí rovnou U_0 a s úhlovým kmitočtem ω_0 .

Kontrola účinnosti transformace energie $W_C \rightarrow W_L$

Sledována bude účinnost přenosu el. energie akumulované v kapacitoru do energie mg. pole induktoru.

Po nabití kapacitoru byla v el. poli kapacitoru akumulovaná energie $W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$. Energie akumulovaná v mg. poli

induktoru je $W_L = \frac{1}{2} L \cdot I_m^2$. Dosazením za $I_m = \frac{U_0}{\omega_0 L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ dostaneme $W_L = \frac{1}{2} L \cdot \left(\frac{U_0}{\omega_0 L} \right)^2 = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2$, tzn. že

$$W_L = W_C.$$

Energie el. pole kapacitoru se zcela přetransformuje na energii mg. pole induktoru. Účinnost přenosu je 100%. To je ale zřejmé, když oba reaktanční prvky L , C jsou bezetrátové. Zbývá ale 50% účinnost nabití kapacitoru z reálného zdroje napětí.

Poznámka

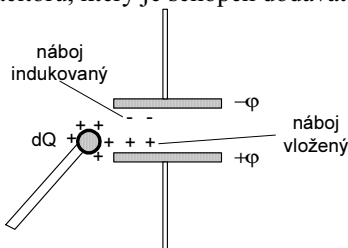
Maxima proudu v LC obvodu odpovídají maximu mg. energie W_L v induktoru, maxima napětí odpovídají maximu el.

energie W_C v kapacitoru. Protože jsou vzájemně posunuta o $\frac{\pi}{2}$, mění se energie pole periodicky tak, že nastává jejich „přelévání“ z $W_L \rightarrow W_C$ a naopak.

Lze konstatovat, že maxima proudu odpovídají maximu kinetické energie v obvodu, kdežto maxima napětí odpovídají maximu potenciální energie elektronů v kapacitoru.

PE1.6 Střední výkon nabitého kapacitoru

Sledován bude střední výkon nabitého kapacitoru, který je schopen dodávat do obvodu po danou dobu.



Obr. PE1.6.1 Nabíjení deskového kondenzátoru

Práce při dodání náboje dQ na kapacitor $dA = \varphi \cdot dQ$. Celková el. práce vykonaná při nabití

$$A = \int_0^Q \varphi \cdot dQ = |Q = C \cdot \varphi| = \frac{1}{C} \int_0^Q Q \cdot dQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \varphi^2.$$

Tato el. práce způsobí generaci el. pole mezi deskami kondenzátoru. Současně se v tomto el. poli akumuluje el. energie $W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$, kde U je rozdíl el. potenciálů φ mezi deskami (elektrodami).

Okamžitý výkon je definován vztahem $p = \frac{dW_e}{dt}$.

Střední výkon za dobu T je

$$P = \frac{W_e}{T} = \left| T = \frac{1}{f} \right| = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \cdot f = W_e \cdot f.$$

Poznámka

Střední výkon, který je nabitý kondenzátor schopen dodávat po dobu T , je přímo úměrný velikosti kapacity C , čtverci napětí U^2 a kmitočtu nabíjecích pulsů f .

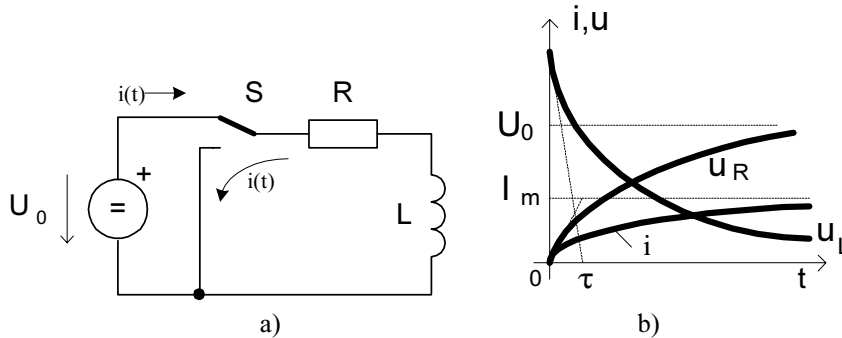
Ve vztazích není uvažována práce pro generaci a přenos náboje ke kapacitoru. Není též diskutován náboj, který se indukuje na opačných stranách desek kondenzátoru.

PE1.7 Nabíjení a vybíjení induktoru [6], [12]

Induktor je obvodový prvek, který je definován jako zásobník (akumulátor) energie mg. pole. Realizován je formou sériového spojení proudových smyček zvaných solenoid.

PE1.7.1 Nabíjení a vybíjení induktoru přes rezistor

Nabíjení induktoru se chápá proces (přechodný děj) po jeho připojení ke zdroji (reálného) ss (st) napětí.



Obr. PE1.7.1.1 Nabíjení a vybíjení induktoru přes rezistor

Pro okamžité hodnoty napětí platí 2. Kirchhoffův zákon ve tvaru $-U_0 + u_R + u_L = 0$, kde R představuje celkový odpor

v obvodu. Dosadíme $u_R = R \cdot i$, $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$. Po dosazení dostaneme $U_0 = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$. Rovnici upravíme na tvar

$$dt = L \cdot \frac{di}{U_0 - R \cdot i} = \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{I_m - i} \text{ nebo dále } \frac{R}{L} \cdot dt = \frac{di}{I_m - i}.$$

Po integraci dostaneme $-\frac{R}{L} \cdot t = \ln(i - I_m) + \ln K$. Rovnici

odlogaritmujeme na tvar $e^{-\frac{R}{L}t} = K \cdot (i - I_m)$. Integrační konstanty se stanoví z počáteční podmínky. Pro $t = 0 \rightarrow i = 0$. Po

dosazení dostaneme $1 = -K \cdot I_m$, z čehož $K = -\frac{1}{I_m}$. Po dosazení dostaneme $e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{1}{I_m}(I_m - i) = 1 - \frac{i}{I_m}$. Po úpravě pak je

$$i(t) = I_m \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

kde $\tau = \frac{L}{R}$ je el. časová konstanta RL obvodu.

Napětí na odporu

$$u_R = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Napětí na induktoru

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot I_m \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot \left(-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Energie dodaná zdrojem

$$W = \int_0^{\infty} U_0 \cdot i \cdot dt = U_0 \cdot I_m \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot dt = U_0 \cdot I_m \cdot \left[t - \left(-\tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]_0^{\infty} = \infty.$$

Energii dodanou zdrojem stanovíme proto přibližně do doby $t = 5\tau$.

$$W = \int_0^{5\tau} U_0 \cdot i \cdot dt = U_0 \cdot I_m \int_0^{5\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot dt = U_0 \cdot I_m \cdot \left[t - \left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]_0^{5\tau} = U_0 \cdot I_m \cdot [5\tau + \tau \cdot (0 - 1)] \approx 4\tau \cdot U_0 \cdot I_m.$$

Je vidět, že dodaná energie je přímo úměrná časové konstantě RL obvodu a max. výkonu $P_m = U_0 \cdot I_m$.

Energie akumulovaná v induktoru

$$W_L = \int u_L \cdot i \cdot dt = U_0 \cdot I_m \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot dt = \frac{1}{2} \tau \cdot U_0 \cdot I_m.$$

Ze vztahu je vidět, že akumulována je pouze $\left(\frac{1}{8}\right)$ z dodané energie.

Dosazením za $\tau = \frac{L}{R}$, $U_0 = R \cdot I_m$, dostaneme pro akumulovanou energii známý vztah $W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2$.

Energie ztracená v rezistoru

$$W_R = \int u_R \cdot i \cdot dt = R \cdot I_m^2 \int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 \cdot dt = R \cdot I_m^2 \int_0^\infty \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \cdot dt = \infty.$$

Energii stanovíme proto přibližně do doby $t = 5\tau$.

$$\begin{aligned} W_R &= R \int i^2 \cdot dt = R \cdot I_m^2 \int_0^{5\tau} \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \cdot dt = R \cdot I_m^2 \cdot \left[t - 2(-\tau) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(-\frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{5\tau} = \\ &= R \cdot I_m^2 \cdot \left[5\tau - 2\tau \cdot (1 - e^{-5}) + \frac{\tau}{2} \cdot (1 - e^{-10}) \right] \approx \frac{7}{2} \tau \cdot R \cdot I_m^2. \end{aligned}$$

S využitím zákona o zachování platí $W(5\tau) = W_L(5\tau) + W_R(5\tau)$, což potvrzuje platnost předchozích vztahů.

Poznámka

Při nabíjení induktoru z reálného zdroje napětí se $\left(\frac{7}{8}\right)$ energie ze zdroje nevratně ztratí, pouze $\left(\frac{1}{8}\right)$ z dodané energie se akumuluje v mg. poli induktoru. Proto generátory používané jako VN zdroje, které využívají energie nabíjení induktoru se budou vyznačovat malou energetickou účinností.

Vybíjení reálného induktoru

Induktor odpojíme od zdroje a spojíme obvod spínačem S do zkratu. Proces přepnutí pokládáme za nekonečně krátký.

Při vybíjení lze psát pro okamžité hodnoty napětí $u_L + u_R = 0$. Po dosazení pak $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0$, z čehož po úpravě

$$-\frac{R}{L} \cdot dt = \frac{di}{i}. \text{ Rovnici integrujeme } -\frac{R}{L} \cdot t = \ln i - \ln K. \text{ Rovnici odlogaritmuje a dostaneme } e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{i}{K} \text{ nebo ve tvaru}$$

$i = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$. Integrační konstantu určíme z mezní (počáteční) podmínky. Pro $t = 0 \rightarrow i = I_m$. Dosadíme do rovnice a dostaneme $K = I_m$. Po dosazení nakonec dostaneme časovou závislost proudu při vybíjení induktoru

$$i(t) = I_m \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Na počátku připojení do zkratu protéká max. proud v obvodu, který se časem zmenšuje k nule.

$$\text{Změna energie je } dW = u_L \cdot i \cdot dt = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = L \cdot i \cdot di.$$

$$\text{Celková akumulovaná energie v induktoru} \quad W_L = \int dW = L \int_0^{I_m} i \cdot di = L \cdot \frac{I_m^2}{2}.$$

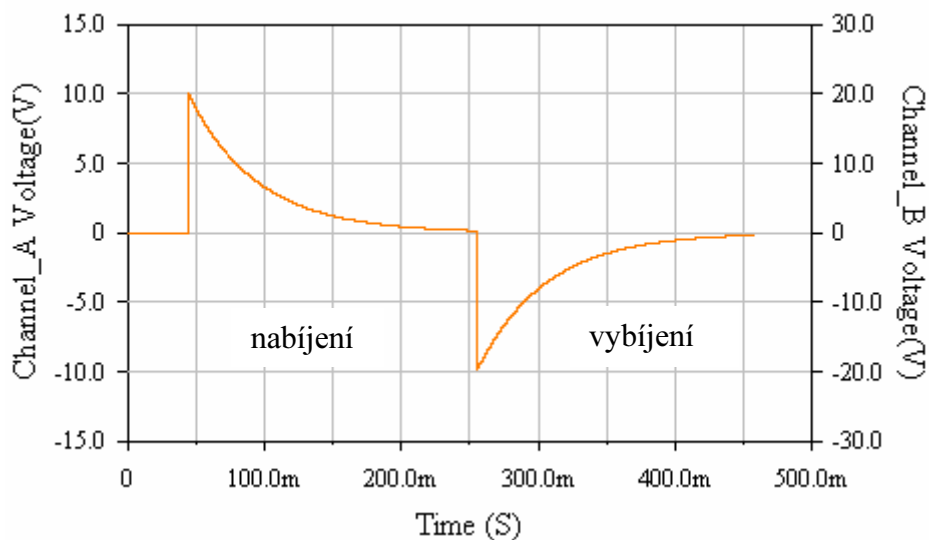
Energie akumulovaná v rezistoru

$$W_R = R \int_0^\infty i^2 \cdot dt = R \cdot I_m^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} \cdot dt = R \cdot I_m^2 \cdot \left[-\frac{\tau}{2} \cdot e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty = R \cdot I_m^2 \cdot \frac{\tau}{2} = L \cdot \frac{I_m^2}{2}.$$

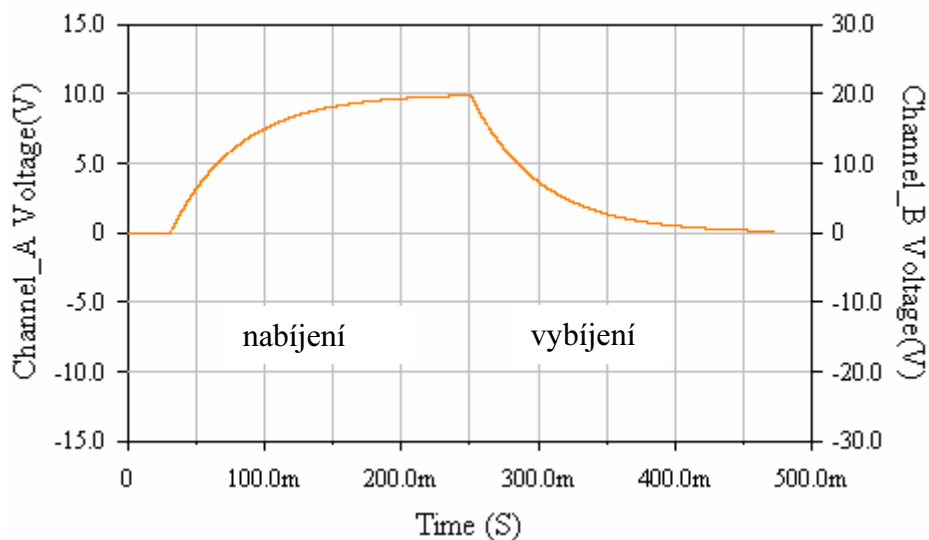
Veškerá akumulovaná energie v induktoru se při vybíjení v rezistoru nevratně přemění v Jouleho teplo. Ukazuje též na fakt, že energie akumulovaná v induktoru je shodná při vybíjení s energií ztracenou v rezistoru, což je zřejmé.

Příklad

Nechť je $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$. Budeme sledovat časové průběhy proudu, napětí a energií v obvodu.



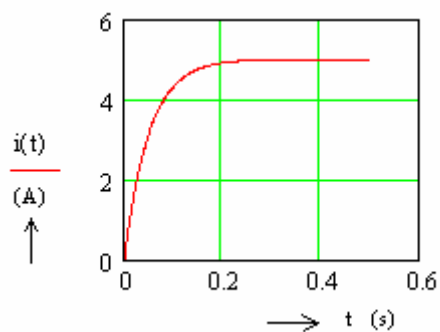
Obr. PE1.7.1.2 Časový průběh napětí na induktoru při nabíjení a vybíjení
pro $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 2 \text{ } \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$



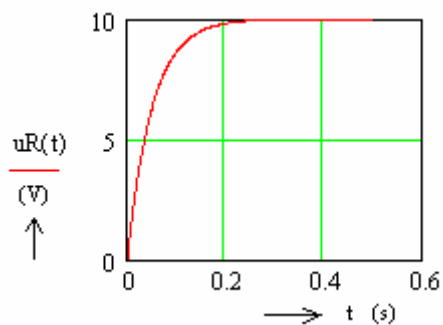
Obr. PE1.7.1.3 Časový průběh napětí na rezistoru při nabíjení a vybíjení
pro $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 2 \text{ } \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$

Budeme dále sledovat časové závislosti změn výkonů na jednotlivých prvcích RL obvodu při procesu nabíjení a vybíjení.

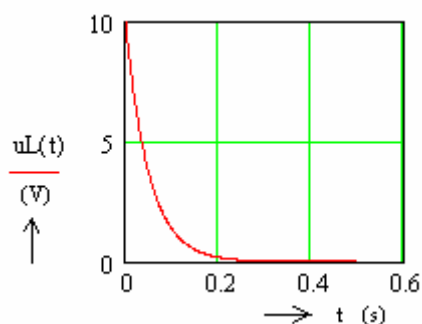
Časové průběhy v RL obvodu při nabíjení



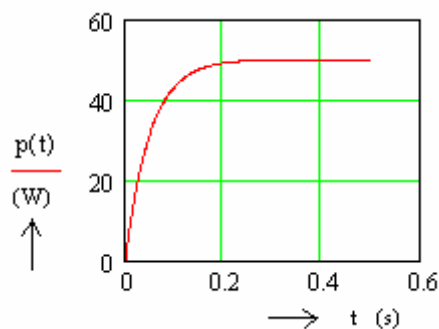
Obr. PE1.7.1.4 Časový průběh proudu při nabíjení
pro $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 2 \text{ } \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$



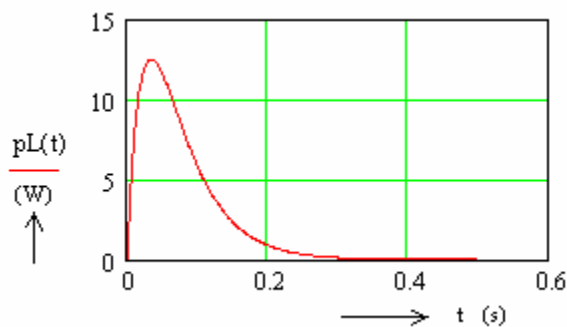
Obr. PE1.7.1.5 Časový průběh napětí na rezistoru při nabíjení
pro $U_0 = 10$ V, $R = 2 \Omega$, $L = 100$ mH



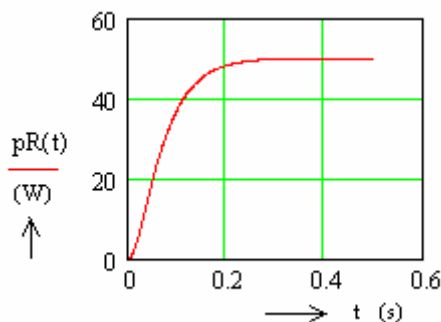
Obr. PE1.7.1.6 Časový průběh napětí na induktoru při nabíjení
pro $U_0 = 10$ V, $R = 2 \Omega$, $L = 100$ mH



Obr. PE1.7.1.7 Časový průběh výkonu odebíraného ze zdroje při nabíjení
pro $U_0 = 10$ V, $R = 2 \Omega$, $L = 100$ mH

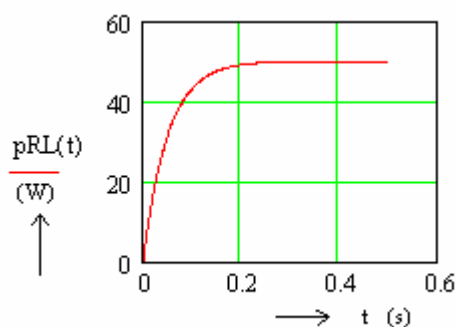


Obr. PE1.7.1.8 Časový průběh výkonu odebíraného induktorem při nabíjení
pro $U_0 = 10$ V, $R = 2 \Omega$, $L = 100$ mH

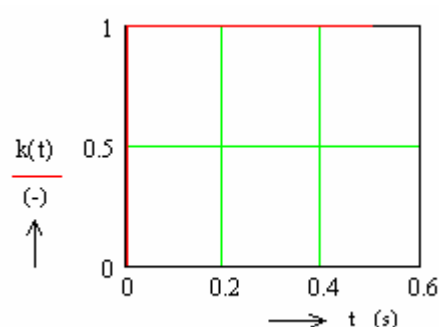


Obr. PE1.7.1.9 Časový průběh výkonu spotřebovaného v rezistoru při nabíjení
pro $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$

Pro kontrolu si vytvoříme časový průběh poměru $k(t) = \frac{p_{RL}(t)}{p(t)}$, kde $p_{RL(t)} = p_R(t) + p_L(t)$, $p(t) = U \cdot i(t)$ je výkon dodávaný zdrojem.



a)



b)

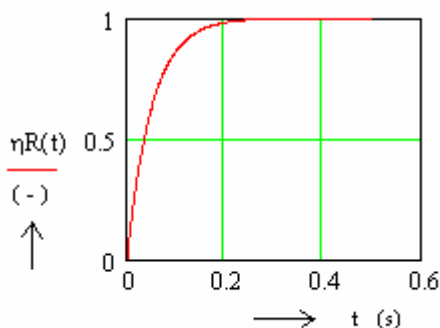
Obr. PE1.7.1.10 Časový průběh výkonu v induktoru a rezistoru k výkonu dodávaného zdrojem při nabíjení
pro $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$

Z grafu je zřejmé, že jsme se nedopustili chyby, protože poměr součtu dílčích výkonů k celkovému výkonu dodávaného zdrojem je roven jedničce. Odchylka je pouze na počátku, kde je zřejmě dána tzv. numerickým „šumem“.

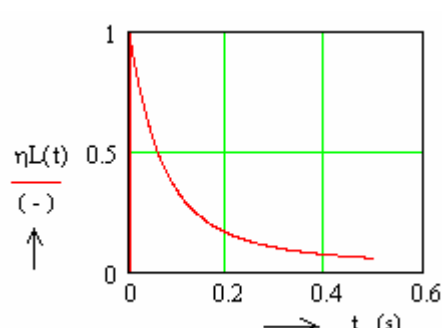
Energetické účinnosti při nabíjení

Definujme si energetické účinnosti (též jako poměrné spotřeby) pro rezistor ve tvaru $\eta_R(t) = \frac{W_R(t)}{W(t)}$ a energetické

účinnosti pro induktor ve tvaru $\eta_L(t) = \frac{W_L(t)}{W(t)}$. Následující grafy ukazují jejich časové průběhy při nabíjení.



a)

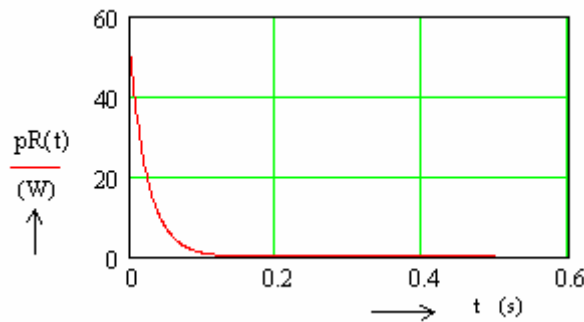


b)

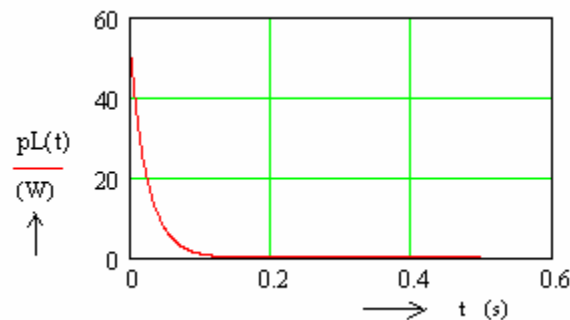
Obr. PE1.7.1.11 Časové průběhy energetických účinností rezistoru a induktoru
k výkonu dodávaného zdrojem při nabíjení pro $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$

Časové průběhy výkonu v RL obvodu při vybíjení

Maxima výkonu odpovídají součinu $P_m = U_0 \cdot I_m = 10 \cdot 5 = 50 \text{ W}$.



Obr. PE1.7.1.12 Časový průběh výkonu v rezistoru při vybíjení pro $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$

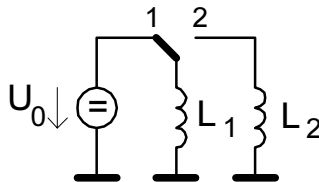


Obr. PE1.7.1.13 Časový průběh výkonu v induktoru při vybíjení pro $U_0 = 10 \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$

Poznámka

Grafy představují časové průběhy výkonů na jednotlivých obvodových prvcích v RL obvodu při procesu nabíjení a vybíjení. Důležitou informací je skutečnost, že při nabíjení induktoru jen 12,5 % z dodané energie slouží ke generaci mg. pole induktoru, přičemž zbytek je nevratně ztracen.

PE1.7.2 Nabíjení a vybíjení induktoru do induktoru



Obr. PE1.7.2.1 Nabíjení a vybíjení ideálního induktoru ideálním induktorem

Nabíjení bezeztrátového induktoru ze zdroje

Poloha 1. Induktor o indukčnosti L_1 je připojen po dobu t_1 ke zdroji napětí U_0 . Z 2. Kirchhoffova zákona platí

$$-U_0 + u_L = 0. \text{ Z indukčního zákona platí } u_L = L \cdot \frac{di}{dt}. \text{ Dosadíme } U_0 = L \cdot \frac{di}{dt}. \text{ Upravíme na tvar } di = \left(\frac{U_0}{L} \right) \cdot dt.$$

Integrujme za dobu t_1 a dostaneme $i = \left(\frac{U_0}{L} \right) \int_0^{t_1} dt$. Za tuto dobu je proud roven $I_m = \left(\frac{U_0}{L} \right) \cdot t_1 = k \cdot t_1$. Nabíjecí proud bezeztrátového (ideálního) induktoru je přímo úměrný době nabíjení.

Poloha 2. Uvažujme nabitý bezeztrátový induktor, který akumuloval energii mg. pole $W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2$, že je připojen k bezeztrátovému induktoru o indukčnosti L_2 . Po spojení obou induktorů bude zřejmě napětí na obou induktorech shodné, proud tekoucí induktorem s indukčností L_1 bude mít snahu téci shodným směrem do induktoru o indukčnosti L_2 . Lze tedy psát s použitím 2. Kirchhoffova zákona $u_{L_1} + u_{L_2} = 0$, z čehož $u_{L_1} = -u_{L_2}$, nebo $-u_{L_1} = u_{L_2}$,

z čehož po dosazení z indukčního zákona dostaneme $L_1 \cdot \left(-\frac{di_1}{dt} \right) = L_2 \cdot \left(\frac{di_2}{dt} \right)$. Opačná znaménka v rovnici říkají, že

zatím co v induktoru L_1 se proud zmenšuje, v L_2 se zvětšuje, tj. časové změny proudu nemusí být číselně shodné, ale jsou navzájem opačné. Číselně shodné musí být obě strany rovnice, tj. napětí na induktorech.

Dosadíme za proudy $i_1(t) = \left(\frac{U_0}{L_1}\right) \cdot t$, $i_2(t) = \left(\frac{U_0}{L_2}\right) \cdot t$. Jejich časové změny budou $\frac{di_1}{dt} = \frac{U_0}{L_1}$, $\frac{di_2}{dt} = \frac{U_0}{L_2}$. Po dosazení

dostaneme $L_1 \cdot \left(-\frac{U_0}{L_1}\right) = L_2 \cdot \left(\frac{U_0}{L_2}\right)$. Hodnoty v závorkách udávají časové změny proudů. Levá i pravá strana rovnice udávají indukovaná napětí na induktorech.

Platnost předchozích vztahů lze též stanovit využitím zákona o zachování, $W_{L1} + W_{L2} = \text{konst.}$.

Časová změna energie mg. pole

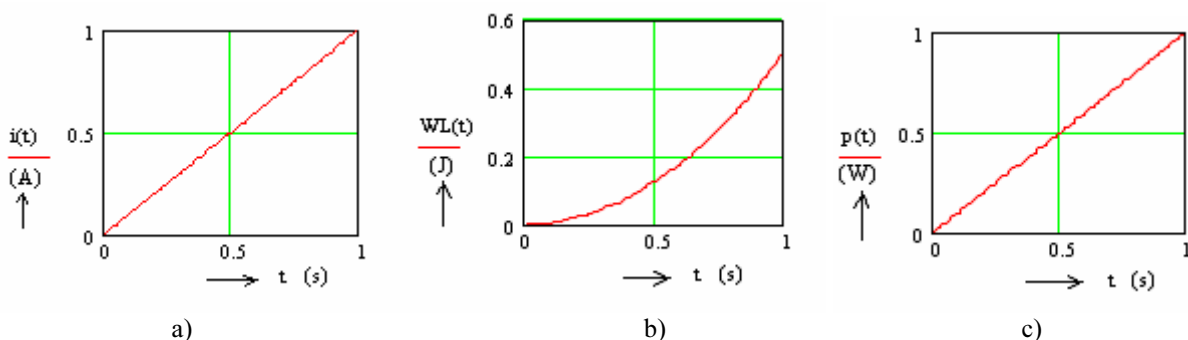
Energie akumulovaná v mg. poli induktoru je $W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$, kde proud je dán vztahem $I = \left(\frac{U_0}{L}\right) \cdot t = k \cdot t$. Dosadíme

a dostaneme časovou závislost energie ekumulované v mg. poli induktoru $W_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left[\left(\frac{U_0}{L}\right) \cdot t\right]^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2}{L} \cdot t^2$.

Její časová změna je $\frac{dW_L}{dt} = p(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2}{L} \cdot t^2 \right) = \left(\frac{U_0}{L} \cdot t \right) \cdot U_0 = I \cdot U_0$.

Poznámka

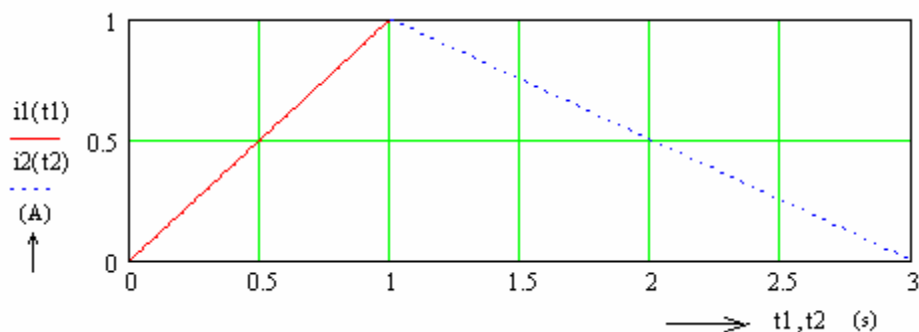
Akumulovaná energie v mg. poli se nemá kam ztratit. Bude se tedy trvale „přelévat“ z jednoho induktoru do druhého. Tento děj bude trvat nekonečně dlouho. Časovou změnou energie je výkon mg. pole, který bude trvale působit v obou ideálních induktorech.



Obr. PE1.7.2.2 Časové průběhy při nabíjení ideálního induktoru pro proud, akumulovanou energii a okamžitý výkon pro $U_0 = 1$ V, $L = 1$ H

Příklad

Uvažujme parametry obvodu $U_0 = 1$ V, $L_1 = 1$ H, $L_2 = 2$ H. Doba nabíjení $t_1 = 1$ s, doba vybíjení $t_2 = 2$ s.

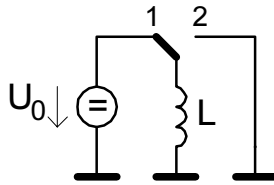


Obr. PE1.7.2.3 Časový průběh proudu při nabíjení a vybíjení ideálního induktoru L_1 do ideálního induktoru L_2

Graf ukazuje časový průběh proudu v ideálním induktoru L_1 při jeho nabíjení a vybíjení do ideálního induktoru L_2 . Po vybití se proces opakuje, přičemž napětí na induktorech se nemění a je rovno napětí nabíjecího zdroje U .

Poznámka

V technické praxi by bylo možno obvod použít v kryogenní technice jako zdroje lineárního proměnného indukčního mg. toku.

PE1.7.3 Vybíjení ideálního induktoru do zkratuObr. PE1.7.3.1 Vybíjení ideálního induktoru do ideálního zkratu ($R = 0$)

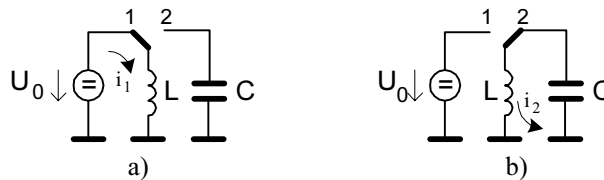
Při nabíjení induktoru bude na něm napětí dáno indukčním zákonem $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$. Po přepojení do polohy č.2 ale bude platit $u_L = 0$. Z toho vyplývá, že $\frac{di}{dt} = 0$, což značí, že musí platit $I = konst.$ Ve zkratovaném ideálním induktoru bude protékat trvale konstantní proud, který bude generovat konst. mg. pole. I v tomto případě energie mg. pole se nemá kam ztratit. Proud bude po nabití induktoru protékat nekonečně dlouho.

Poznámka

Tohoto jevu se využívá v kryogenní technice ke generaci konstantního mg. indukčního toku.

PE1.7.4 Vybíjení ideálního induktoru do ideálního kapacitoru

Při vybíjení ideálního induktoru do ideálního kapacitoru nastává transformace energie mg. pole induktoru na energii el. pole kapacitoru.



Obr. PE1.7.4.1 Vybíjení ideálního induktoru do ideálního kapacitoru

Po připojení induktoru ke zdroji ss napětí bude na svorkách induktoru okamžitě napětí zdroje U_0 , ale proud induktorem bude dán vztahem $i = \left(\frac{U_0}{L} \right) \int dt$, a po integraci $i(t) = \left(\frac{U_0}{L} \right) \cdot t = k \cdot t$. Vidíme, že bude od nulové hodnoty lin. narůstat

s časem. Uvažujme, že induktor ke zdroji bude připojen po dobu t_1 . Za tuto dobu proud dosáhne hodnoty $I_m = \left(\frac{U_0}{L} \right) \cdot t_1$.

V induktoru bude akumulována energie mg. pole $W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2$. Poté připojíme induktor ke kapacitoru. Induktor se přes kapacitor začne vybíjet, přičemž směr proudu zůstane nezměněn. Vybíjením induktoru začne proces nabíjení kapacitoru, polarita napětí na kapacitoru bude ale opačná (daná směrem protékajícího proudu), než u zdroje ss napětí U_0 . Připojení induktoru ke kapacitoru bude trvalé.

Po připojení bude proud v obvodu dán proudem kapacitoru, pro který platí $i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$, napětí na LC obvodu bude dáno

napětím na induktoru, pro které platí $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$. Pro spojení LC platí $u_C + u_L = 0$. Po dosazení a následné derivaci pak

dostaneme $\frac{1}{C} \int i \cdot dt + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$ z čehož $i + LC \frac{d^2 i}{dt^2} = 0$ nebo též $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot i = 0$.

Jde o difer. rov. 2. řádu homogenní s konst. koef., která popisuje časový průběh proudu v LC obvodu.

Partikulární integrál rovnice je tvaru $i = e^{\alpha t}$. Provedeme si první a druhou derivaci řešení a dostaneme

$i = e^{\alpha t}$, $\frac{di}{dt} = \alpha \cdot e^{\alpha t}$, $\frac{d^2 i}{dt^2} = \alpha^2 \cdot e^{\alpha t}$ a dosadíme do difer rovnice. Dosazením dostaneme $e^{\alpha t} \cdot \left(\alpha^2 + \frac{1}{LC} \right) = 0$. Po úpravě

pak je kořen $\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{-1}{LC}}$. Dostali jsme dvojnásobný komplexní kořeny – imaginární. Výraz v závorce upravíme na tvar

$\alpha_{1,2} = \pm j\omega_0$, kde ω_0 je úhlový kmitočet LC obvodu.

Obecné řešení diferenciální rovnice je tvaru $i = A_1 \cdot \cos \beta t + A_2 \cdot \sin \beta t$, kde β je imaginární kořen, pak je řešení tvaru $i = A_1 \cdot \cos \omega_0 t + A_2 \cdot \sin \omega_0 t$. Integrační konstanty stanovíme z počáteční podmínky. Pro $t = 0 \rightarrow i = I_m$, z čehož je $A_1 = I_m$. Po dosazení $i = I_m \cdot \cos \omega_0 t + A_2 \cdot \sin \omega_0 t$. Druhou integrační konstantu získáme derivací řešení podle času.

Dostaneme $u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = -\omega_0 \cdot L \cdot I_m \cdot \sin \omega_0 t + \omega_0 \cdot L \cdot A_2 \cdot \cos \omega_0 t$. Dosazením pro $t = 0 \rightarrow u_L = 0$, protože též $u_C = 0$, dostaneme $0 = \omega_0 \cdot L \cdot A_2$, z čehož $A_2 = 0$. Řešení pro časový průběh proudu bude tvaru

$$i(t) = I_m \cdot \cos \omega_0 t.$$

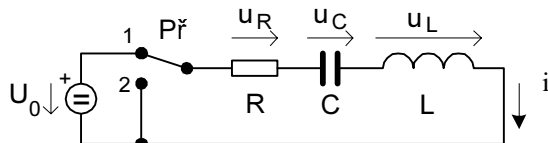
V obvodu vzniknou periodické kmity s amplitudou proudu I_m . Obvod pracuje jako generátor periodických kmitů sinusového průběhu.

Poznámka

Tohoto jevu se využívá v kryogenní technice ke generaci periodického mg. indukčního toku.

PE1.8 Nabíjení a vybíjení RLC obvodu [6], [12]

Bude sledováno chování (přechodný jev) v RLC obvodu po jeho připojení ke zdroji ss napětí a po jeho spojení do zkratu. Uvažujeme RLC obvod v sériovém zapojení, kde hodnota odporu R bude vyjadřovat celkový ztrátový odpor v obvodu, což může být vnitřní odpor zdroje napětí, odpor vinutí solenoidu nebo ekvivalentní svodový odpor kapacitoru.



Obr. PE1.8.1 Nabíjení a vybíjení RLC obvodu

Uvažujeme, že platí $U_0 = konst.$ Po zapnutí platí z 2. Kirchhoffova zákona $u_R + u_L + u_C - U_0 = 0$. Po dosazení dostaneme

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = U_0.$$

Protože platí $\int i \cdot dt = q$, bude $i = \frac{dq}{dt}$, $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$. Po dosazení a úpravě pak dostaneme

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = U_0.$$

Dostali jsme nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty pro el. náboj v RLC obvodu.

K řešení lze také přistupovat tak, že vyjdeme ze vztahu pro u_C . Platí $i = C \cdot \frac{d}{dt}(u_C)$, $\frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2}{dt^2}(u_C)$. Po dosazení

a úpravě dostaneme

$$L \cdot C \frac{d^2}{dt^2}(u_C) + R \cdot C \frac{d}{dt}(u_C) + u_C = U_0.$$

Počáteční diferenciální rovnici derivujeme podle času t a dostaneme

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

K této homogenní rovnici řešíme charakteristickou rovnici, která je tvaru $L \cdot \alpha^2 + R \cdot \alpha + \frac{1}{C} = 0$. Její řešení je tvaru

$$\alpha_{1,2} = -\left(\frac{R}{2L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{4L}{C} \cdot \frac{1}{4L^2}}, \text{ z čehož po úpravě dostaneme } \alpha_{1,2} = -\left(\frac{R}{2L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Dosazením za $\delta = \left(\frac{R}{2L}\right)$ a $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ dostaneme řešení char. rovnice ve tvaru $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

Výraz pod odmocninou je diskriminant $D = \delta^2 - \omega_0^2$, který může nabývat následujících hodnot:

1. $D > 0$ platí pro přechodný jev tlumený,
2. $D = 0$ platí pro přechodný jev aperiodický,
3. $D < 0$ platí pro přechodný jev kmitavý.

V našem případě nás bude zajímat *přechodný jev kmitavý*. Kořen charakteristické rovnice bude tvaru

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \sqrt{(-1)(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta \pm j\omega_v,$$

byl zaveden *vlastní* úhlový kmitočet RLC obvodu $\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ a $j = \sqrt{-1}$.

Řešení pro nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty pro el. náboj v RLC obvodu je tvaru

$$q = e^{-\delta t} \cdot (K_1 \cdot \sin \omega_v t + K_2 \cdot \cos \omega_v t) + konst.,$$

Nechť z poč. Podmínek platí, že $konst. \equiv C \cdot U_0$ a její časová derivace je $\frac{d}{dt}(C \cdot U_0) = 0$.

Pro proud platí

$$i = \frac{dq}{dt} = (-\delta) \cdot e^{-\delta t} \cdot (K_1 \cdot \sin \omega_v t + K_2 \cdot \cos \omega_v t) + e^{-\delta t} \cdot (\omega_v \cdot K_1 \cdot \cos \omega_v t - \omega_v \cdot K_2 \cdot \sin \omega_v t)$$

$$i = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[(K_1 \cdot \omega_v - K_2 \cdot \delta) \cdot \cos \omega_v t - (K_1 \cdot \delta + K_2 \cdot \omega_v) \cdot \sin \omega_v t \right].$$

Konstanty K_1, K_2 se určí z počáteční podmínky v RLC obvodu.

Pro $t = 0 \rightarrow i = 0$, $q = 0$. Po dosazení dostaneme $K_2 + C \cdot U_0 = 0 \rightarrow K_2 = -C \cdot U_0$. Po dosazení za K_2 do

dalšího vztahu dostaneme $K_1 \cdot \omega_v - K_2 \cdot \delta = 0 \rightarrow K_1 = -\frac{\delta \cdot C \cdot U_0}{\omega_v}$.

Dosazením za konstanty K_1, K_2 a po úpravě dostaneme řešení pro náboj

$$q = -\frac{C \cdot U_0}{\omega_v} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (\delta \cdot \sin \omega_v t + \omega_v \cdot \cos \omega_v t) + C \cdot U_0.$$

Dosazením za konstanty K_1, K_2 a po úpravě dostaneme řešení pro proud

$$\begin{aligned} i = \frac{dq}{dt} &= -\frac{C \cdot U_0}{\omega_v} \cdot (-\delta) \cdot e^{-\delta t} \cdot (\delta \cdot \sin \omega_v t + \omega_v \cdot \cos \omega_v t) - \frac{C \cdot U_0}{\omega_v} \cdot e^{-\delta t} \cdot (\delta \cdot \omega_v \cdot \cos \omega_v t - \omega_v^2 \cdot \sin \omega_v t) = \\ &= e^{-\delta t} \cdot \left(\frac{C \cdot U_0}{\omega_v} \cdot \delta^2 \cdot \sin \omega_v t + C \cdot U_0 \cdot \delta \cdot \cos \omega_v t - C \cdot U_0 \cdot \delta \cdot \cos \omega_v t - C \cdot U_0 \cdot \omega_v \cdot \sin \omega_v t \right) = \\ &= C \cdot U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[\left(\frac{\delta^2}{\omega_v} - \omega_v \right) \cdot \sin \omega_v t + (\delta - \delta) \cdot \cos \omega_v t \right] = \frac{C \cdot U_0}{\omega_v} \cdot e^{-\delta t} \cdot (\delta^2 - \omega_v^2) \cdot \sin \omega_v t. \end{aligned}$$

Platí $(\delta^2 - \omega_v^2) = \delta^2 - (\delta^2 - \omega_0^2) = \omega_0^2$, kde $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Po dosazení dostaneme

$$i = \frac{C \cdot U_0}{\omega_v} \cdot \frac{1}{L \cdot C} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin \omega_v t = \frac{U_0}{\omega_v \cdot L} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin \omega_v t.$$

Časová závislost proudu v obvodu tedy bude
$$i = \frac{U_0}{\omega_v \cdot L} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin \omega_v t.$$

Napětí na odporu je
$$u_R = R \cdot i = \frac{R \cdot U_0}{\omega_v \cdot L} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin \omega_v t.$$

Napětí na indukčnosti je

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{U_0}{\omega_v \cdot L} \cdot (-\delta \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin \omega_v t + \omega_v \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos \omega_v t) = \frac{U_0}{\omega_v} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (\omega_v \cdot \cos \omega_v t - \delta \cdot \sin \omega_v t).$$

Napětí na kapacitě určíme pomocí vztahu $dq = C \cdot du \rightarrow du = \frac{1}{C} \cdot dq \rightarrow u_C = \frac{1}{C} \cdot q$.

Po dosazení dostaneme
$$u_C = -\frac{U_0}{\omega_v} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (\delta \cdot \sin \omega_v t + \omega_v \cdot \cos \omega_v t) + U_0$$

nebo po úpravě
$$u_C = U_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-\delta \cdot t}}{\omega_v} \cdot (\delta \cdot \sin \omega_v t + \omega_v \cdot \cos \omega_v t) \right].$$

Tímto je stanovena časová závislost proudu v RLC obvodu a okamžité hodnoty napětí na R, L a C.

Příklad

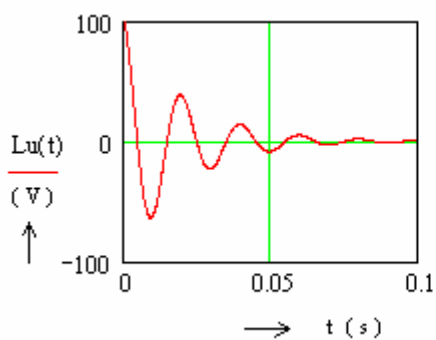
Uvažujme RLC s parametry $U = 100 \text{ V}$, $R = 100 \text{ } \Omega$, $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ H}$.

Činitel tlumení je $\delta = \frac{R}{2L} = \frac{100}{2 \cdot 1} = 50$, úhlový kmitočet ideálního LC je $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^{-5}}} = 316$.

Protože platí $\delta < \omega_0$, RLC obvod splňuje podmínku kmitání (má komplexní kořen $\alpha_{1,2}$).

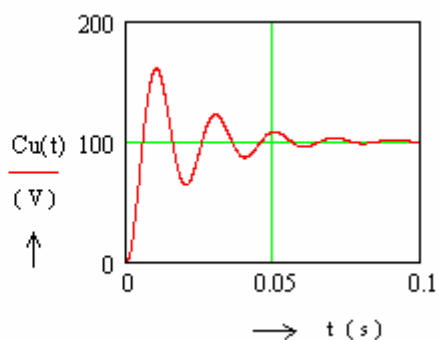
a)
Průběh proudu v RLC obvodu

b)
Průběh napětí na odporu



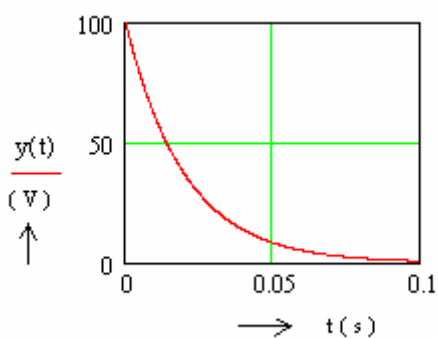
c)

Průběh napětí na indukčnosti

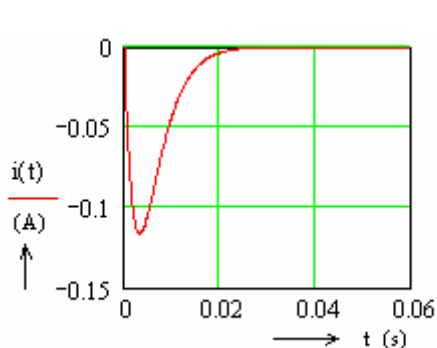


d)

Průběh napětí na kapacitě

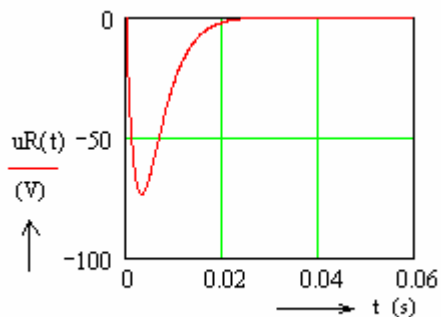


e)

Průběh útlumu (obalová křivka pro kladné napětí $y(t) = U_0 \cdot e^{-\delta t}$)Pro aperiodický stav RLC obvodu (diskriminant $D = 0$) jsou časové průběhy pro $R = 316 \, \Omega$, tj. $\delta = \omega_0$ 

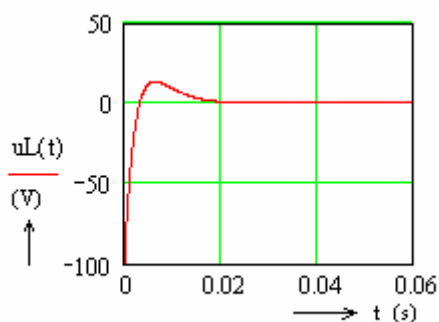
f)

Průběh proudu v RLC obvodu



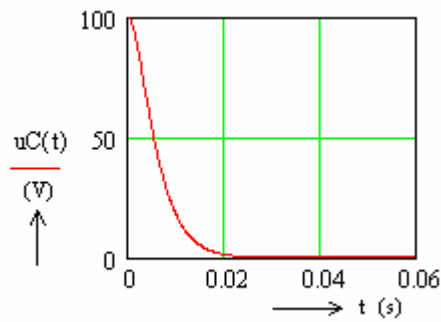
g)

Průběh napětí na odporu



h)

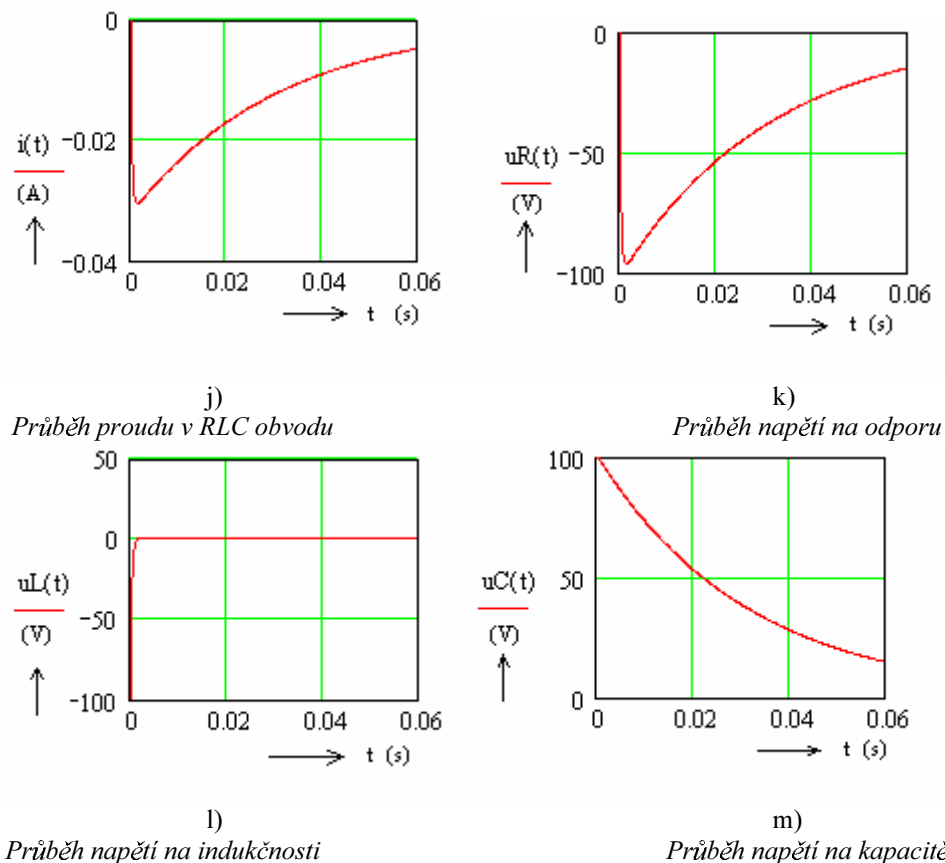
Průběh napětí na indukčnosti



i)

Průběh napětí na kapacitě

Pro *přetlumený* stav RLC obvodu (diskriminant $D > 0$) jsou časové průběhy pro $R = 3160 \, \Omega$, tj. $\delta > \omega_0$



Obr. PE1.8.2 Časové průběhy v RLC obvodu

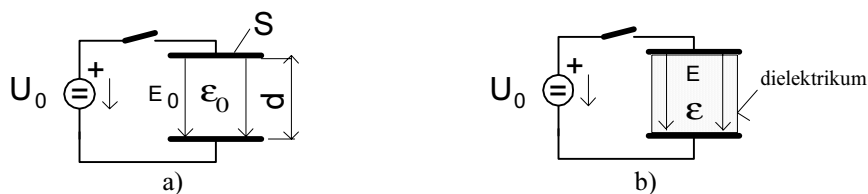
Z časových průběhů pro proud v obvodu a pro napětí na R, L, a C je vidět, že pro stav aperiodický a stav přetlumený se průběhy příliš od sebe neodlišují. V technické praxi pro návrh VN zdrojů nebudou využívány. Využíván bude pouze stav kmitavý.

Poznámka

Napětí na R, L, C jsou vázány vztahem $u_R + u_L + u_C = 0$.

PE1.9 Význam elektrické izolace [6], [17]

Aby se vysvětlil význam el. izolace, je potřeba stanovit vliv dielektrika na velikost el. pole. Pro jednoduchost vyjdeme z příkladu umístění dielektrika do homogenního el. pole.



Obr. PE1.9.1 Příklad homogenního el. pole

a) vzduchového dielektrika mezi deskami kondenzátoru

b) látkového dielektrika

Pro hodnocení vyjdeme z Gaussovy věty $Q = \iint D \cdot dS = D \cdot S$, kde S je plocha desek kondenzátoru, D je el. indukce, pro kterou pro vakuum a vzduch platí $D_0 = \epsilon_0 \cdot E_0$, kde ϵ_0 je permitivita vakua (vzduchu), E_0 je intenzita el. pole mezi deskami kondenzátoru se vzduchovým dielektrikem, pro kterou platí $E_0 = \frac{U_0}{d}$, kde d je vzdálenost mezi deskami.

Případ $Q = konst.$ – kapacitor nabit a odpojen od zdroje

Pro kapacitu deskového kondenzátoru s dielektrikem platí $C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}$, kde ϵ_r je relativní permitivita dielektrika.

Pro akumulovaný el. náboj bez dielektrika platí $Q_0 = C_0 \cdot U_0$, pro kapacitor s dielektrikem $Q = C \cdot U$. Dosazením

a porovnáním obou rovnic dostaneme $\epsilon_0 \cdot \frac{S}{d} \cdot E_0 \cdot d = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d} \cdot E \cdot d$, z čehož intenzita el. pole v dielektriku kondenzátoru je

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot E_0.$$

Za podmínky $Q = konst.$ je intenzita el. pole v dielektriku je zmenšena (ϵ_r) krát. Tento případ, který je často uváděn v učebnicích se ale v technické praxi téměř nevyskytuje.

Případ $U = konst.$ – kapacitor trvale připojen ke zdroji

V tomto případě vyjdeme z podmínky shodného napětí, tj. $U = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q}{C}$. Po dosazení $\frac{\epsilon_0 \cdot E_0 \cdot S}{\epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E \cdot S}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}}$.

Po úpravě dostaneme, že $E = E_0$.

V dielektriku při zapnutém zdroji napětí nedojde ke změně intenzity el. pole. Nutnou el. energii nezbytnou k polarizaci dielektrika dodá zdroj.

Poznámka

Pro případ, kdy $Q = konst.$ dojde ke zmenšení intenzity el. pole, kdežto při $U = konst.$ ke změně intenzity el. pole v dielektriku nedochází. Tento případ je v technické praxi velmi častý. Má význam v nehomogenním el. poli, např. u kruhových vodičů s el. izolací.

Příklad

Uvažujme vodič o poloměru r bez izolace, který s izolací má poloměr R o délce l . Vodič je pod el. napětím.

El. indukční tok, který vychází válcovou plochou radiálně z vodiče je $\Psi = \iint E \cdot dS = E_1 \cdot S_1 = E_1 \cdot 2\pi \cdot r \cdot l$. Tentýž el.

indukční tok bude vycházet i z vodiče s izolací o poloměru R , tj. $\Psi = \iint E \cdot dS = E_2 \cdot S_2 = E_2 \cdot 2\pi \cdot R \cdot l$. Porovnáním obou rovnic dostaneme $E_1 \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = E_2 \cdot 2\pi \cdot R \cdot l$, z čehož pro intenzitu el. pole na povrchu izolace platí

$$E_2 = \left(\frac{r}{R}\right) \cdot E_1.$$

U izolovaného vodiče i při jeho připojení k napětí dochází na povrchu izolace ke zmenšení intenzity el. pole, což je žádoucí. Tento fakt je důvodem pro izolování vodičů.

Příklad

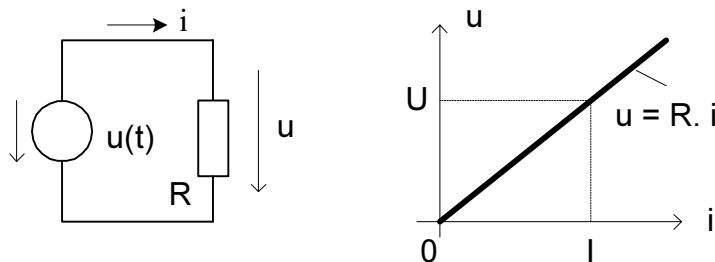
Uvažujme poloměr vodiče $r = 0,5 \text{ mm}$, poloměr vodiče s izolací $R = 2,5 \text{ mm}$. Úkolem je stanovit, kolikrát je intenzita el. pole na povrchu izolace menší než na povrchu vodiče.

Řešení

Dosadíme do vztahu $\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{0,5}{2,5}\right) = \frac{1}{5}$. Intenzita el. pole na povrchu izolace je 5 krát menší než na povrchu vodiče.

PE1.10 Jouleho ztráty na rezistoru

Uvažujme lineární odporový dvojpól s VA charakteristikou podle obr.



Obr. PE1.10.1 Základní zapojení s odporem a jeho VA charakteristika

Z 2. Kirchhoffova zákona platí $-u(t) + u = 0$, z čehož je $u(t) \equiv u = R \cdot i$. Element spotřebované el. energie na rezistoru je

$$dW = u \cdot i \cdot dt = R \cdot i^2 \cdot dt. \text{ Celková spotřebovaná energie na lineárním odporu je } W_R = R \int_0^{\tau} i^2 \cdot dt.$$

Pro periodický sinusový průběh proudu $i = I_m \cdot \sin \omega t$ je spotřebovaná energie za dobu periody T rovna

$$W_R = R \cdot I_m^2 \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt. \text{ Dosazením za } \sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \text{ dostaneme}$$

$$W_R = \frac{1}{2} R \cdot I_m^2 \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) \cdot dt = \frac{1}{2} R \cdot I_m^2 \cdot T.$$

Pro střídavý signál je $I_m = \sqrt{2} \cdot I_{ef}$, z čehož po dosazení dostaneme ztracenou energii za dobu T

$$W_R = R \cdot I_{ef}^2 \cdot T.$$

Střední ztracený výkon za dobu T je $P = \frac{W_R}{T} = R \cdot I_{ef}^2$.

Poznámka

Energie (výkon) představuje na rezistoru nevratné ztráty, které se přemění na Jouleho teplo. Vnitřní odpor zdroje je součástí odporu zátěže.

James Prescott Joule (1818–1889), anglický fyzik, v r. 1840 objevil jev magnetizace těles a stav mg. nasycení, v r. 1843 zjistil mechanický ekvivalent tepla. Vypočítal rychlost tepelného pohybu molekul plynu, určil měrná tepla některých plynů a objevil fyzikální podstatu tlaku plynu na stěnu nádoby. Spolupracoval s fyzikem Williamem Thomsonem (lordem Kelvinem).