

**fg**

Ivan Zelinka, František Včelař, Marek Čandík

**FRAKTÁLNÍ  
GEOMETRIE**  
**principy a praxe**

Praha 2006

TECHNICKÁ<sup>®</sup>  
LITERATURA  
**BEN**

# NÁZORY RECENZENTŮ

Monografie „*Fraktální geometrie, principy a praxe*“ vhodným způsobem vyplňuje citelnou mezeru v česky psané odborné literatuře. Jde o dílo interdisciplinární, které najde uplatnění u řady specialistů v přírodních a technických vědách, matematice, ale i u specialistů v oblasti IT. Kniha je napsána bez nadbytečného matematického balastu a přístup k výkladu by se dal označit jako „algoritmický“. Proto se bude dobře číst i posluchačům univerzit; výklad je tak názorný, že mu porozumí absolventi již prvního ročníku našich vysokých škol. Formálně je práce rozdělena do dvou částí, teoretické a praktické. Obě dvě jsou doplněny algoritmy v programu Mathematica a zejména řadou nádherných obrázků. Dílo úspěšně snese srovnání s podobnými publikacemi zahraničními. Mám za to, že kniha má ambice stát se bestsellerem na poli české odborné literatury.

RNDr. Aleš Raidl, Ph.D.  
MFF UK, Praha

Předkládaná publikace se zabývá popularizační formou světem fraktálů. Je nutno zdůraznit, za co se knížka nevydává: nejedná se o učebnici s přesnou hierarchií „věta–důkaz“, ani o vševyčerpávající katalog fraktálů; a není to ani základní příručka, zabývající se teorií samoorganizace či chaosu. Kdo hledá poučení v těchto oblastech, musí hledat jinde. Kdo se ale začte do této knížky, dá mi určitě za pravdu, že potěšil své oko i svého ducha. A to není zase tak málo...

Prof. RNDr. Pavel Demo, CSc.  
Fyzikální ústav, AVČR, Praha

Každý autor odborné knihy určené široké veřejnosti se musí vypořádat s problémem jak vyvážit její obsah, aby zůstal přístupný a čtivý a přitom si zachoval svoji odbornou úroveň. Po prostudování knihy „*Fraktální geometrie – principy a praxe*“ mohu s potěšením konstatovat, že se autorům podařilo vytvořit text, který čtenáře zaujme a odborníka neurazí, i když se v některých částech museli autoři Ivan Zelinka, František Včelař a Marek Čandík uchýlit k nutným zjednodušením a zkratkám. I když je obor fraktální geometrie relativně mladý, vysvětluje některé, do té doby nevysvětlitelné problémy, obecně známý je například problém rozdílného měřítka při měření hranic států. Aplikace fraktální geometrie nachází také využití na různých místech technické praxe, přičemž je oblast fraktální komprese nejnámější, ale ne jedinou. Na řadu dalších možností uplatnění autoři ve své knize upozorňují a otevírají tak prostor pro další úvahy a experimenty čtenářů. Významným počinem autorů je také vytvoření velkého množství aplikačních úloh v prostředí programového systému Mathematica, kterými jednak doplnili text knihy a zejména je zpřístupnili v elektronické podobě veřejnosti, aby tak dále podnítily zájem o problematiku fraktální geometrie. Knihu „*Fraktální geometrie – principy a praxe*“ mohu s radostí doporučit všem zájemcům o informatiku a její aplikace.

Doc. Ing. Radim Farana, CSc.  
Fakulta strojní, VŠB-TU, Ostrava

***Ivan Zelinka:***

Věnuji památce mých prarodičů,  
Marii a Ondřeji Muchovým.

***František Včelař:***

Rád bych tuto knížku věnoval památce svého otce Ladislava Včelaře a jeho nejlepšího přítele Antonína Gajdůška. Byli grafiky, výtvarníky a malíři. Patřili k malé skupině lidí, kteří „i za hluboké totality přinášeli Evropu do města Zlína“. V době, kdy svět neuměl fraktály ani pojmenovat, tvořili díla s obrazy, které by dnes byly jednoznačně považovány za nejkvalitnější výtvary fraktální grafiky. Co na tom, že jeden tak činil experimentálními fotografickými nebo grafickými a druhý především malířskými technikami. Oběma to bylo jasné, nepotřebovali žádnou matematickou berličku, jejich výtvarné vidění bylo jednoduše prostoupeno přirozenou fraktální vizí.

***Marek Čandík:***

Věnuji památce Jozefa Čandíka,  
mého laskavého otce a učitele.

Publikace se zabývá problematikou fraktální geometrie ve dvou úrovních a to teoretické a aplikační.

V teoretické části se čtenář dozví co provázelo vznik fraktální geometrie a jací lidé ji přímo či nepřímo doprovázeli při jejím vzniku. Po té budou vysvětleny některé algoritmy pomocí kterých se generují fraktální obrazce a to jak černobílé tak barevné. Témata fraktální dimenze a interpolace jsou zde rovněž diskutovány.

V aplikační části je pozornost věnována digitální kompresi obrazů pomocí fraktální geometrie s podrobným vysvětlením metody.

Text dále pokračuje popisem výskytu fraktálů v časových řadách s vysvětlením, jak je jich používáno burzovními makléři k burzovním spekulacím. Knihu uzavírá kapitola o možném využití fraktální geometrie v šifrování.

Knihu provází množství programových příkladů konstrukce fraktálů v prostředí Mathematica.

*Tato publikace vznikla za podpory grantů:*

*č. MSM 7088352101, GAČR 102/06/1132 a GAČR 102/05/0271.*

---

Ivan Zelinka, František Včelař, Marek Čandík

## **Fraktální geometrie – principy a praxe**

Bez předchozího písemného svolení nakladatelství nesmí být kterákoli část kopírována nebo rozmnožována jakoukoli formou (tisk, fotokopie, mikrofilm nebo jiný postup), zadána do informačního systému nebo přenášena v jiné formě či jinými prostředky.

Autoři a nakladatelství nepřijímají záruku za správnost tištěných materiálů. Předkládané informace jsou zveřejněny bez ohledu na případné patenty třetích osob. Nároky na odškodnění na základě změn, chyb nebo vynechání jsou zásadně vyloučeny.

Všechny registrované nebo jiné obchodní známky použité v této knize jsou majetkem jejich vlastníků. Uvedením nejsou zpochybněna z toho vyplývající vlastnická práva.

Veškerá práva vyhrazena

© Ivan Zelinka, František Včelař, Marek Čandík, Zlín 2006

© Nakladatelství BEN – technická literatura, Věšínova 5, Praha 10

Ivan Zelinka, František Včelař, Marek Čandík: Fraktální geometrie – principy a praxe  
BEN – technická literatura, Praha 2006

1. vydání

**ISBN 80-7300-193-4**

# OBSAH

Názory recenzentů	2
Stručná historie fraktální geometrie	8
Předmluva	10

## 1 Historický pohled na vznik fraktální geometrie 11

1.1	Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor	15
1.2	Wacław Franciszek Sierpiński	16
1.3	Niels Fabian Helge von Koch	18
1.4	Gaston Maurice Julia	20
1.5	Felix Hausdorff	22
1.6	Alexander Michajlovič Ljapunov	22
1.7	Aristid Lindenmayer	23
1.8	Benoit B. Mandelbrot	24
1.9	Edward Norton Lorenz	26
1.10	Otto E. Rössler	27

## 2 Fraktály a jejich principy 29

2.1	Konstrukce fraktálů, algoritmus IFS	30
2.2	Stochastický IFS a jiné algoritmy	47
2.3	Juliovy množiny a algoritmus TEA	52
2.4	Fraktály a příbuzné geometrické vzory	69

## 3 Fraktály a fraktální geometrie 83

3.1	Geometricky hladký útvar	84
3.2	Nekonečně členitý útvar	84
3.3	Hausdorffova-Besicovicova dimenze	85
3.3.1	Výpočet fraktální dimenze	85
3.3.1.1	Úsečka	86
3.3.1.2	Čtverec	87
3.3.1.3	Krychle	87

3.3.1.4	Zobecnění výpočtu fraktální dimenze .....	87
3.3.1.5	Cantorovo diskontinuum .....	89
3.3.1.6	Kochova křivka .....	89
3.3.1.7	Sierpinského trojúhelník .....	89
3.3.1.8	Hausdorffova-Besicovicova dimenze vybraných přírodních útvarů ....	90
3.4	Soběpodobnost .....	91

## **4 Některé matematické pojmy fraktální geometrie 93**

4.1	Metrika a metrický prostor .....	94
4.2	Kontraktivní zobrazení .....	94
4.3	Pevný bod .....	95
4.4	Banachova věta o pevném bodu .....	95
4.5	Iterující funkční systémy – IFS věta .....	95
4.6	Kolážová věta .....	96

## **5 Fraktální interpolace 97**

5.1	Interpolace a fraktální interpolace .....	98
5.2	Jednoduchá fraktální interpolace .....	99
5.3	Fraktální interpolace se skrytými proměnnými .....	103

## **6 Fraktály a jejich principy 105**

6.1	Fraktálové kódování digitálních obrazů .....	106
6.1.1	Význam kolážové věty .....	106
6.1.2	Dekompozice obrazů .....	106
6.1.3	Transformace příbuznosti .....	108
6.1.4	Podobnosti bloků .....	110
6.1.5	Jacquinův kódovací algoritmus .....	110
6.1.6	Zpětná rekonstrukce obrazů .....	113
6.1.7	Rychlé kódovací algoritmy .....	115
6.1.8	Zvyšování komprese .....	116
6.1.9	Zobecnění kódovacího algoritmu pro barevné obrazy .....	117
6.2	Omezení fraktálového kódování obrazů .....	119

## **7 Fraktály v časových řadách – Elliottovy vlny 121**

7.1	Elliottova vlna .....	122
-----	-----------------------	-----

7.2	Impulzní vlny .....	123
7.2.1	Rozšířená .....	124
7.2.2	Diagonální pátá .....	125
7.2.3	Neúspěšná pátá .....	125
7.3	Korekční vlny .....	126
7.3.1	Cikcak .....	126
7.3.2	Hladká .....	127
7.3.3	Trojúhelník .....	127
7.4	Analýza .....	128

## **8 Neurofraktální šifrování 129**

8.1	Základy kryptologie .....	131
8.1.1	Transpoziční systémy .....	132
8.1.2	Transkripční systémy .....	132
8.1.3	Polyalfabetické šifry .....	132
8.1.4	Systémy s veřejným klíčem .....	132
8.2	Využití fraktální geometrie k šifrování .....	133
8.2.1	Šifrování obrazů .....	133
8.2.2	Šifrování textu .....	133
8.3	Neuronové sítě .....	134
8.4	Využití neuronových sítí k šifrování .....	136
8.4.1	Fraktální šifrování textu .....	137
8.4.2	Neurofraktální šifrování textu .....	138

## **9 Inverzní fraktální problém 139**

9.1	Inverzní fraktální problém a jeho řešení .....	140
-----	--	-----

## **10 Příklad využití neuronové sítě a fraktální geometrie – fraktální vidění 143**

10.1	Experiment 1 – učení .....	145
10.2	Experiment 2 – rozeznávání .....	145

**Závěr 149**

**Literatura a vybrané internetové odkazy 151**

**Rejstřík 155**

# STRUČNÁ HISTORIE FRAKTÁLNÍ GEOMETRIE

## Období matematických „monster“ (komplexní, neregulární objekty)

- 1872:** Cantorova množina – diskontinuum
- 1875:** Weierstrassova spojitá křivka bez derivace
- 1906:** Brownův pohyb, Kochova křivka

## Hierarchické, „stupňovité“ chování

- 1919:** Hausdorffova dimenze komplexních (složitých) geometrických objektů
- 1951:** Hurstův zákon pro chování toku Nilu
- 1956:** Gutenbergův-Richterův zákon o distribuci amplitud zemětřesení
- 1961:** Richardsonův zákon o měření komplexních (složitých) přírodních útvarů, jako např. pobřeží
- 1963:** Stommelův diagram, popisující prostorové a časové měřítko pro dynamiku oceánu v čase a prostoru
- 1969:** Rozšíření Hurstovy práce v hydrologii (Mandelbrot, Van Ness, Wallis)

## Oficiální vznik fraktální geometrie

- 1975:** Mandelbrot použil slovo „fraktál“
- 1977:** Mandelbrotovy fraktály: formy, dimenze
- 1980:** Weierstrassova-Mandelbrotova fraktální funkce – geometrie Weierstrassových monster (z r. 1875)
- 1982:** Fraktální modely aplikované na ekologii (Hastings), vzory tvořené mraky (Lovejoy)
- 1986:** Vznik IFS algoritmu (Barnsley)

## Fraktály a dynamika

- 1981:** Witten a Sander představují DLA (Diffusion-Limited Aggregation)
- 1983:** Hentschel a Procaccia dávají do souvislosti fraktály a podivné atraktory
- 1984:** Zveřejněna Wolframova dynamika buněčných automatů
- 1987:** Samoorganizace (Bak, Tang, Weisendelf)
- 1991:** Kniha „Fraktály a multifraktály v geofyzice“ (Schertzer, Lovejoy)

## 90. léta

- 1991:** Cca 400 publikací na téma fraktály
- 1992:** Používání fraktálů k vysvětlení nejrůznějších otázek – od struktury vesmíru až po distribuci zemětřesení
- 2006:** Vznik této publikace :-)



*Georg Cantor:*

Umění klást ty správné otázky je důležitější,  
než umění je řešit.

# PŘEDMLUVA

Předkládaná kniha je publikací, která se zabývá tzv. fraktální geometrií. Snahou a snad i cílem autorů bylo vytvořit publikaci, která by zaplnila jisté „vakuum“ v oblasti fraktální geometrie na knižním trhu a zároveň, aby byla čitelná, pokud možno, pro nejširší okruh čtenářů. Celá kniha je koncipována tak, že k pochopení základů fraktální geometrie by měla postačit sama bez studia dalších materiálů, nicméně studium dalších materiálů je vhodné, zvláště pro ty čtenáře, kteří chtějí postoupit dále. V takovém případě lze doporučit literaturu, jako např. [1] a [2].

Snahou autorů bylo doložit ke všem tvrzením a vztahům programy, které je realizují, včetně obrázků generovaných těmito programy. Veškerý počítačový kód v této publikaci je napsán v prostředí Mathematica ([www.wolfram.com](http://www.wolfram.com), [www.elkan.cz](http://www.elkan.cz)) a je volně přístupný na stránkách [www.fai.utb.cz/people/zelinka/fraktaly.zip](http://www.fai.utb.cz/people/zelinka/fraktaly.zip). Ti čtenáři, kteří Mathematicu nevlastní, si mohou zdarma stáhnout tzv. Mathreader (prohlížeč), umožňující pasivní prohlížení kódů a obrázků.

Celá publikace je napsána tak, že je vhodné ji číst postupně od začátku. V první části jsou probrány základy fraktální geometrie, Juliovy množiny a tzv. IFS a TEA algoritmy. Dále následuje „speciální“ kapitola, která demonstruje existenci fraktálních a pseudofraktálních množin ve vybrané třídě matematických funkcí, rovnic, fyzikálních a počítačových systémů. Tato kapitola byla přidána hlavně z důvodu ukázat čtenáři, že nádherné fraktální struktury se mohou skrývat za mnohdy na první pohled nudnými, nepřehlednými a složitými rovnicemi. Poté následuje aplikační část, v níž se čtenář seznámí, často jen rámcově, s fraktálovým kódováním obrazu, Elliotovými vlnami, neurofraktálním šifrováním atd.

Rádi bychom poděkovali našim recenzentům, a to prof. RNDr. Pavlu Demovi, CSc. (FU AVČR), doc. Ing. Radimu Faranovi, CSc. (VŠB-TU Ostrava) a RNDr. Aleši Raidlovi, Ph.D (MFF UK) za velmi pečlivé přečtení rukopisu a cenné připomínky, které rozhodně přispěly ke zvýšení jeho kvality.

To, zda se kniha povedla nebo ne, je na názoru čtenáře. I navzdory faktu, že publikace byla několikrát pečlivě čtena a opravována, nelze vyloučit případné překlepy i zásadnější chyby, za což se předem omlouváme a za dodatečné připomínky děkujeme.

Autoři knihy